



# Ευρωπαϊκό Πορτφόλιο Μουσικής και Μαθηματικών: «Ηχοποιώντας τα Μαθηματικά»

## Εγχειρίδιο Εκπαιδευτικού

### Συγγραφείς:

Peter Mall, Maria Spychiger, Rose Vogel, Julia Zerlik

*University of Music and Performing Arts Frankfurt (Main)*

*Goethe University Frankfurt (Main)*

Ιανουάριος 2016



With the support of the Lifelong Learning Programme of the European Union. This communication reflects the views of the Maths Consortium, and the Commission cannot be held responsible for any use that may be made of the information contained herein.

**Συνεργάτες:**

Markus Cslovjecssek, Helmut Linneweber-Lammerskitten, Martin Guggisberg, Andreas Richard, Boris Girnat, Daniel Hug και Samuel Inniger (The School of Teacher Education, University of Applied Sciences, Βορειοδυτική Ελβετία)

Carmen Carrillo, Albert Casals, Cristina González-Martín, Jèssica Perez Moreno, Montserrat Prat και Laia Viladot (Universitat Autònoma de Barcelona, Ισπανία)

Μαρία Αργυρίου, Μαρία Μαγαλιού, Γιώργος Σιτώτης, Ελισσάβητ Περακάκη, Κατερίνα Γέραλη Μόσχου (Ενωση Εκπαιδευτικών Μουσικής Αγωγής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, Ελλάδα)

Caroline Hilton, Jennie Henley, Jo Saunders και Graham F. Welch (UCL Institute of Education, Ηνωμένο Βασίλειο)

Slávka Κορčáková, Alena Pridavková, Edita Šimčíková και Jana Hudáková (University of Prešov, Σλοβακία)

Raluca Sassu, Anamaria Cațană και Mihaela Bucuta (Centre for Research in Psychology, The Lucian Blaga University of Sibiu, Ρουμανία)

Peter Ludes (Goethe University, Φρανκφούρτη (Main), Γερμανία)

**Μετάφραση:** Αγάπη Δενδάκη

**Επιστημονική επιμέλεια κειμένων στα ελληνικά:** Μαρία Αργυρίου και Ελισσάβητ Περακάκη

Copyright © 2016. All rights reserved.

Το παρόν εγχειρίδιο αποτελεί παράγωγο του Comenius Lifelong Learning Project

538547-LLP-1-CH-COMENIUS-CMP

[www.maths.emportfolio.eu](http://www.maths.emportfolio.eu)

## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Ηχοποιώντας: Η διασύνδεση της μουσικής και των μαθηματικών .....</b>	<b>7</b>
2.1	Δημιουργικά βήματα για δασκάλους και μαθητές.....	7
2.2	Αναγνώριση και παραγωγή μοτίβων .....	8
2.3	Η μουσική και τα μαθηματικά ως αλληλοκαλυπτόμενα και αλληλοεπιδρώντα συστήματα σημείων .....	10
<b>3</b>	<b>Δομώντας τη μάθηση .....</b>	<b>15</b>
3.1	Από το καθήκον στη δόμηση .....	15
3.2	Αντίληψη και δράση .....	16
3.3	Δημιουργώντας εμπειρίες.....	17
<b>4</b>	<b>Εκπαιδευτικές απόψεις και δομή των δραστηριοτήτων .....</b>	<b>19</b>
4.1	Διδακτικά και μαθησιακά περιβάλλοντα .....	19
4.2	Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού και του χώρου .....	20
4.3	Δομή των παραδειγμάτων.....	21
<b>5</b>	<b>Δραστηριότητες .....</b>	<b>25</b>
5.1	Ηχηρές διαδρομές γύρω από το σχολείο.....	25
5.2	Πηδώντας στον ρυθμό: σχέσεις πολλαπλασιασμού και μέτρου .....	29
5.3	Χτυπώντας παλαμάκια στο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 2, 3 και 5 .....	32
5.4	Αριθμοί που «ηχούν».....	37
5.5	Οι χοροί της γωνίας.....	40
5.6	Φεγγαράκι μου λαμπρό .....	43
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα.....</b>	<b>466</b>
<b>7</b>	<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>477</b>



## 1 Εισαγωγή

Η μουσική και τα μαθηματικά έχουν ένα ιδιαίτερο κοινό χαρακτηριστικό: πολλοί άνθρωποι πιστεύουν ότι δεν είναι καλοί στο ένα ή στο άλλο (ή και στα δύο). Πιθανότατα, ωστόσο, το «Δεν μπορώ να τραγουδήσω» ή το «Ποτέ δεν κατάλαβα τα μαθηματικά» δεν θα τους αποτρέψει από το να σταδιοδρομήσουν με επιτυχία, ούτε θα αλλάξει τη γνώμη που έχουν οι άλλοι γι' αυτούς.

Το πρόγραμμα «Ευρωπαϊκό Πορτφόλιο Μουσικής & Μαθηματικών: Ηχοποιώντας τα Μαθηματικά (ΕΠΜ–Μαθηματικά) στοχεύει στη διαμόρφωση μιας διαφορετικής αντίληψης σχετικά με αυτό το χαρακτηριστικό. Ο καθένας μπορεί να τραγουδήσει και να συνθέσει μουσική όπως και ο καθένας μπορεί να ασχοληθεί με τα μαθηματικά. Και τα δύο αυτά πεδία αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της ζωής και της κοινωνίας μας. Αυτό που χρειάζεται βελτίωση είναι η ικανότητά μας να δίνουμε ευκαιρίες στους μαθητές για να εξοικειωθούν ευχάριστα μαζί τους.

Ο συνδυασμός των μαθηματικών και της μουσικής για δραστηριότητες στην τάξη δεν είναι κάτι καινούργιο. Στην πραγματικότητα, ο αριθμός των δημοσιευμένων παραδειγμάτων αυξάνεται συνεχώς. Δυστυχώς, πολλοί ερευνητές εστιάζουν μόνο στη χρήση της μουσικής για να αυξηθεί η μαθηματική, ή η γενική, γνώση, ακόμα και η νοημοσύνη. Ο Peter Hilton αποσαφηνίζει αυτό το σημείο όσον αφορά τόσο στα μαθηματικά όσο και στη μουσική:

[...] τα μαθηματικά, όπως και η μουσική, αξίζουν να τα κάνεις για δική τους χάρη και μόνο [...]. Αυτό δεν σημαίνει πως αρνούμαστε τη μεγάλη χρησιμότητα των μαθηματικών· ωστόσο, αυτή ακριβώς η χρησιμότητα συντείνει στο να αποκρύπτεται και να μεταμφιέζεται η πολιτισμική άποψη των μαθηματικών. Ο ρόλος της μουσικής δεν υφίσταται παρόμοια διαστρέβλωση, διότι είναι σαφές ότι αποτελεί μια τέχνη, η άσκηση της οποίας γεμίζει με εμπειρίες τον συνθέτη, τον εκτελεστή και το κοινό· η μουσική δεν χρειάζεται να επιχειρηματολογήσει σχετικά με τη συμβολή της στη διαμόρφωση της ανθρώπινης προσωπικότητας. Κανείς δεν ρωτά, αφότου ακούσει μια συμφωνία του Μπετόβεν, «Τι μας χρειάζεται αυτό». Επιπλέον, τα μαθηματικά δεν κερδίζουν σε χρησιμότητα με το να αγνοείται η εγγενής τους αξία – αντιθέτως, η εκτίμηση των μαθηματικών και η κατανόηση της εγγενούς ποιότητας και δυναμικής τους, είναι απαραίτητες για να μπορέσουμε να τα εφαρμόσουμε αποτελεσματικά (Gullberg, 1997, σ. xvii).

Το συγκεκριμένο ευρωπαϊκό πρόγραμμα απευθύνεται εξίσου σε καθηγητές των μαθηματικών και της μουσικής, καθώς και σε όλους όσους ενδιαφέρονται να εξερευνήσουν διαθεματικά τα συγκεκριμένα διδακτικά αντικείμενα. Αυτό το εγχειρίδιο αποτελείται από τρία κύρια μέρη:

Το **πρώτο μέρος**, πραγματεύεται τη διασύνδεση μαθηματικών και μουσικής. Ξειλώνοντας με δημιουργικά βήματα εισαγωγής στο θέμα, τονίζει την αναγνώριση μοτίβων ως βασική δεξιότητα και για τα δύο πεδία και, τέλος, εγκολπώνεται τους κοινούς μύθους ότι η μουσική είναι μαθηματικά και, αντίστοιχα, τα μαθηματικά είναι μουσική.

Το **δεύτερο μέρος** εστιάζει στα βασικά της μάθησης και εμβαθύνει στο ερώτημα γιατί τα μαθηματικά και η μουσική πρέπει να διδάσκονται μαζί χωρίς την παγίδα της αξιοποίησης του ενός για χάρη του άλλου. Η συν-δόμηση, η αντίληψη και η δράση, μαζί και η δημιουργία εμπειριών, είναι λέξεις-κλειδιά που λαμβάνονται υπόψη.

Το **τρίτο μέρος**, που αποτελεί τον πυρήνα αυτού του εγχειριδίου, είναι μια συλλογή δραστηριοτήτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην τάξη. Πολλές δραστηριότητες και προτάσεις είναι ήδη διαθέσιμες. Στόχος μας είναι να ενθαρρύνουμε τον καθένα να τις

χρησιμοποιήσει. Αυτές που περιέχονται σε τούτο το εγχειρίδιο φωτίζουν διάφορα πεδία τόσο στα μαθηματικά όσο και στη μουσική, προκειμένου να καλύψουν ευρύτερες περιοχές όπως το τραγούδι, το χορό, την ακρόαση, την επίλυση προβλημάτων, τους αριθμούς, τη μέτρηση, και ούτω καθεξής. Μέσα από αυτή την προσέγγιση, θέλουμε να συνδέσουμε το πρόγραμμα με τους βασικούς άξονες των αναλυτικών προγραμμάτων των χωρών που συμμετέχουν: της Γερμανίας, της Ελβετίας, της Ελλάδας, του Ηνωμένου Βασιλείου, της Ισπανίας, της Ρουμανίας και της Σλοβακίας. Όλα τα παραδείγματα βασίζονται στην έννοια των μοτίβων του διδακτικού σχεδιασμού.

Το συγκεκριμένο εγχειρίδιο για τον εκπαιδευτικό παρουσιάζει δραστηριότητες με διαφορετικό μαθηματικό και μουσικό περιεχόμενο, προκειμένου να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς πηγές, ιδέες και παραδείγματα. Οι δραστηριότητες είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε να μπορούν να επεκταθούν, να προσαρμοστούν σε διαφορετικά περιεχόμενα και να ταιριάζουν στις ανάγκες κάθε εκπαιδευτικού και των μαθητών του. Επιπλέον, οι δραστηριότητες διατηρούν την αυτονομία τους: μια διδακτική ενότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κατανόηση των εννοιών ή μπορεί να συνδυαστεί αλλά και να συνδεθεί με άλλες ενότητες.

Εκτός από το συγκεκριμένο εγχειρίδιο για τον εκπαιδευτικό, το πρόγραμμα παρέχει μαθήματα Συνεχόμενης Επαγγελματικής Ανάπτυξης (ΣΕΑ), ιστοσελίδα (<http://maths.emportfolio.eu>) από την οποία μπορεί κανείς να κατεβάσει όλα τα υλικά/εργαλεία, καθώς και μια διαδικτυακή συνεργατική πλατφόρμα. Μια γενική επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας και έρευνας διατίθεται σε διαφορετικά αρχεία<sup>1</sup>. Διατίθενται, επίσης, συμπληρωματικά φυλλάδια για τον εκπαιδευτικό τα οποία προσφέρουν επιπλέον υλικό αλλά και μια σύντομη επισκόπηση του θεωρητικού πλαισίου, αποτελώντας τη βάση για τα μαθήματα ΣΕΑ. Το πρόγραμμα «Ευρωπαϊκό Πορτφόλιο Μουσικής & Μαθηματικών: Ηχοποιώντας τα Μαθηματικά (ΕΠΜ-Μαθηματικά) σχετίζεται με το πρόγραμμα ΕΠΜ-Γλώσσες «Ένας Δημιουργικός Δρόμος για τις Γλώσσες» (<http://emportfolio.eu/emp/>).

---

<sup>1</sup> Βλ. και τη σχετική «Βιβλιογραφική Ανασκόπηση» (Hilton, Saunders, Henley, & Henriksson, 2015) και ‘State of the Art Paper’ (Saunders, Hilton & Welch, 2015).

## 2 Ηχοποιώντας: Η διασύνδεση της μουσικής και των μαθηματικών

### 2.1 Δημιουργικά βήματα για εκπαιδευτικούς και μαθητές

Η μάθηση και η διδασκαλία, οι οποίες συνδυάζουν μεθοδολογίες από διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, συχνά δημιουργούν τις συνθήκες για να αναπτυχθούν νέες διδακτικές προσεγγίσεις προσφέροντας καινοτόμους τρόπους κατανόησης της ύλης για όλους τους εμπλεκόμενους. Καθιερωμένες διδακτικές μέθοδοι εγκαταλείπονται, ειδικά εκείνες που είναι χρωματισμένες με αρνητικά συναισθήματα, προκειμένου να δώσουν χώρο σε ευφάνταστες προτάσεις.

Ο διαθεματικός συνδυασμός των δύο κλάδων, της μουσικής και των μαθηματικών, στο συγκεκριμένο πρόγραμμα, συστήνει τόσο το θεωρητικό περιεχόμενο όσο και τις διδακτικές μεθόδους με σκοπό να εμπλουτίσει δημιουργικά τη διδακτική και τη μαθησιακή διαδικασία. Από αυτή την άποψη, μπορούν να δημιουργηθούν νέοι συνδυασμοί στα δύο ακαδημαϊκά πεδία, με μια επιλογή παραδειγμάτων, ως εξής:

- Πρέπει να γίνουν επιλογές ως προς το περιεχόμενο και τις μεθόδους που υπάρχουν και για τους δύο επιστημονικούς κλάδους. Αυτές οι μέθοδοι και το περιεχόμενο πρέπει να υποστηρίζουν και να βελτιώνουν τη μουσική και τη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Το να είσαι δημιουργικός, σύμφωνα με τον Poincaré (1948), σημαίνει να βρίσκεις ένα νέο συνδυασμό (Hümmel κ.ά., 2011, σσ. 178–179) του δεδομένου περιεχομένου.
- Με αυτούς τους νέους συνδυασμούς, δεν υπάρχει κάποια τυποποιημένη πρακτική για να υλοποιήσεις το μάθημα καθεαυτό. Το να είσαι δημιουργικός, σύμφωνα με τον Ervynck (1991), σημαίνει να βρίσκεις νέους τρόπους, οι οποίοι «αποκλίνουν από τις καθιερωμένες και αναμενόμενες απόπειρες» (Hümmel κ.ά., 2011, σ. 179).
- Αυτοί οι νέοι τρόποι που αναπτύσσονται δεν θα ήταν δημιουργικοί αν δεν ήταν προσαρμόσιμοι (Sternberg & Lubart, 2000). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το να είσαι δημιουργικός σημαίνει «την ικανότητα να παρουσιάσεις ένα απροσδόκητο και ευφάνταστο αποτέλεσμα, που να είναι ευλόγως προσαρμόσιμο (Hümmel κ.ά., 2011, σ. 179).

Αυτές οι πλευρές της μαθηματικής και μουσικής δημιουργικότητας μπορούν να προσαρμοστούν, αφενός, στη δημιουργική διαδικασία ανάπτυξης δραστηριοτήτων στο πρόγραμμα ΕΠΙΜ-Μαθηματικά και, αφετέρου, στις δράσεις και στον τρόπο σκέψης όλων των εκπαιδευτικών αλλά και των μαθητών που συμμετέχουν στις δραστηριότητες.

Σε γενικές γραμμές, αριετά θέματα μπορούν να επιλεγούν από ένα πλήθος προτάσεων, συνδυάζοντας τις δύο επιστήμες. Κάθε σύνδεση οδηγεί σε νέα μαθησιακά μονοπάτια. Βέβαια, αυτά τα μονοπάτια δεν είναι τυποποιημένα. Συγχρόνως, αναδύονται νέες προσαρμοστικές προσβάσεις σε μαθηματικά και μουσικά θέματα. Η συγκεκριμένη άποψη αποτυπώνεται στην περιγραφή των παραλλαγών του περιεχομένου των δραστηριοτήτων που δημιουργήθηκαν.

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες αποτελούν το πλαίσιο της δημιουργικής συνεργασίας για όλους τους συμμετέχοντες. Νέες διδακτικές προτάσεις προσφέρουν νέες εμπειρίες για εκείνους τους μαθητές που - σε άλλη περίπτωση - θα αντιμετώπιζαν με σκεπτικισμό τις μαθηματικές ή μουσικές γνώσεις και έννοιες, βοηθώντας τους να επαναπροσδιορίσουν τον σκεπτικισμό τους. Επιπλέον,

διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις βοηθούν στο να ξεπεραστούν υπάρχουσες δυσκολίες και αφήνουν χώρο στους εμπλεκόμενους να αποκτήσουν εμπειρίες στους δύο κλάδους, στη μουσική και στα μαθηματικά.

## 2.2 Αναγνώριση και παραγωγή μοτίβων

Η αναγνώριση αποτελεί μια βασική ανθρώπινη δραστηριότητα, η οποία συνδέεται με την επίγνωση. Αναγνώριση μοτίβων σημαίνει, πρώτα απ' όλα, να δίνουμε *προσοχή* στο συνδεδειγμένο μοτίβο (Bateson, 2002, σ. 16). Κάποιες θεωρίες ισχυρίζονται ότι η προσοχή είναι ρυθμικά οργανωμένη (Auhagen, 2008, σ. 444). Η προσοχή στους συνδεδειγμένους μηχανισμούς και η επίγνωση αυτών, παρατηρείται πολύ συχνά σε παιδιά, περιλαμβάνοντας εκφράσεις χαράς: παίζουν σχοινάκι, πηδάνε πάνω από λακκιούβες με λασπόνερα, χτυπάνε ρυθμικά ραβδιά πάνω σε φράχτες - όλα αυτά είναι αυθόρμητες χαρούμενες παιδικές δραστηριότητες. Η ανθρώπινη ικανότητα για ρυθμικό συγχρονισμό, καθώς και η αναγνώριση μοτίβων, ξεκινάει στην πρώιμη παιδική ηλικία και φαίνεται ότι ενθαρρύνεται με το ταχτάρισμα του μωρού στα γόνατα (Fischinger & Kopiez, 2008, σ. 459).

Οι άνθρωποι έχουν εξαρχής την ικανότητα να ακολουθούν τα ρυθμικά μοτίβα. Έρευνες με νεογέννητα μωρά αποδεικνύουν αυτό ακριβώς το γεγονός, με την έννοια ότι μπορούν να διακρίνουν ανάμεσα σε ρυθμικά και μη ρυθμικά χτυπήματα δαχτύλων (Gembris, 1998, σσ. 403f.). Νωρίτερα ακόμη, ενόσω το έμβρυο κολυμπά στη μήτρα της μητέρας, οι κινήσεις των ποδιών του εμφανίζουν μοτίβα με τέμπο, που συγχρονίζονται με τους χτύπους της καρδιάς της μητέρας (Gruhn, 2005, σ. 126). Αυτές οι πρώιμες ρυθμικές μουσικές ικανότητες έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι το μωρό μπορεί να αναγνωρίσει μοτίβα και να συντονιστεί μαζί τους ή, όπως έχει διατυπώσει ο Björn Merker, μπορεί «να εμπλακεί σε έναν επαναλαμβανόμενο χτύπο» (Merker, 2000, σ. 59). Όπως υποστηρίζει η Vogel (2005), σε επόμενο χρόνο, η εμπλοκή γίνεται φανερή σε αμέτρητες δραστηριότητες, κυρίως μέσω του παιχνιδιού, για παράδειγμα, σε ομαδικά παιχνίδια με μπάλα καθώς και σε όλο και πιο σύνθετες δραστηριότητες – όπως όταν συνοδεύουν λεκτικά μοτίβα και ποιηματάκια με ρυθμικές κινήσεις – αλλά και σε δραστηριότητες με τραγούδι.

«Η ανάλυση μοτίβων και η περιγραφή των κανονικοτήτων και των ιδιοτήτων τους είναι ένας από τους στόχους των μαθηματικών, τον οποίο ο Alan H. Schoenfeld (1992, σ. 334) χαρακτηρίζει ως «...ένα ζωντανό υποκείμενο που επιδιώκει να κατανοήσει μοτίβα που διαποτίζουν τόσο τον κόσμο γύρω μας όσο και τον νου μέσα μας». Ο Keith Devlin (2003, σ.3) προχωρεί ακόμη περισσότερο και περιγράφει τα μαθηματικά ως την επιστήμη των μοτίβων: «Μόνο μέσα στα τελευταία είκοσι χρόνια περίπου αναδύθηκε ένας ορισμός των μαθηματικών με τον οποίο συμφωνούν τώρα οι μετα-μαθηματικοί» (Vogel, 2005, σ. 445).

Μια άλλη σημαντική άποψη της αναγνώρισης μοτίβων είναι η κατηγοριοποίηση ή ο *επιμερισμός* (Jourdain, 2001, σ. 163). Τα *επί μέρους στοιχεία* είναι μικρά πακέτα πληροφοριών που μπορούμε να τα χειριστούμε σαν μία ενότητα<sup>2</sup>. Αντιμετωπίζουμε τα *επί μέρους στοιχεία* ιεραρχικά. Από μικρά *επί μέρους στοιχεία*, δημιουργούνται μεγαλύτερα. Από αυτά δημιουργούνται ακόμη μεγαλύτερα *επί μέρους στοιχεία* και ούτω καθεξής. Στην πραγματικότητα, δημιουργούμε μοτίβα προκειμένου να

<sup>2</sup> Βλ. επίσης και το Teacher's Handbook for EMP-Maths Languages, σσ. 21–24: [http://empportfolio.eu/emp/images/stories/materials/EMP\\_Teachers\\_Handbook\\_Final\\_2012.pdf](http://empportfolio.eu/emp/images/stories/materials/EMP_Teachers_Handbook_Final_2012.pdf)



δημιουργήσουμε *επί μέρους στοιχεία*. Η ακρόαση μιας συνεχούς ηχητικής ακολουθίας, οδηγεί στο χτίσιμο ομάδων που αποτελούνται από δύο ή τρία χαρακτηριστικά σχηματίζοντας νέα ρυθμικά μοτίβα (Auhagen, 2008, σ. 439). Η ομοιότητα και τα κοινά χαρακτηριστικά διευκολύνουν τη νοητική αναγνώριση μοτίβων. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να αναγνωρίζουμε, να ερμηνεύουμε και να δομούμε μοτίβα. Για παράδειγμα, ο ρόλος των επί μέρους στοιχείων, για την αλληλεπίδραση με τα μοτίβα, (Vogel, 2005, σ. 446) γίνεται σημαντικός κατά τη διερεύνηση των γεωμετρικών μοτίβων

Οι συνθέτες χρησιμοποιούν αυτή τη δεξιότητα προκειμένου να γράψουν πολυφωνικά κομμάτια για μονοφωνικά όργανα. Ομαδοποιούν τους ήχους με τέτοιο τρόπο ώστε το αυτί μας να «ακούει» δύο ή περισσότερες διαφορετικές φωνές. Η αναγνώριση μοτίβων αποτελεί σημαντική άσκηση για την ακρόαση ήχων (Bharucha, Mencl & Einar, 1996). Όταν αναγνωρίζουμε τους ήχους των οργάνων στις αντίστοιχες οκτάβες τους, καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για μια διαδικασία ακουστικής αναγνώρισης μοτίβων, παρόμοια με την ικανότητά μας να κατηγοριοποιούμε τους ήχους ΝΤΟ, ΡΕ, ΜΙ, ΦΑ, ΣΟΛ, ΛΑ και ΣΙ ως μείζονα κλίμακα, όπως επίσης, και να αναγνωρίζουμε την ίδια μελωδία όταν παίζεται σε διαφορετικές τονικότητες. Οι Bharucha κ.ά. υποστηρίζουν ότι «οι δυτικοί ακροατές φαίνεται να έχουν μια ιδιαίτερα περίτεχνη δεξιότητα στην αναγνώριση των κλιμάκων και των μεταξύ τους σχέσεων (Bharucha, Mencl & Einar, 1996, σ. 148). Αρχικές μελέτες δείχνουν ότι η παραπάνω δεξιότητα είναι σημαντική και για την μουσική ανάγνωση (Fine, Berry, & Rosner, 2006· Waters, Underwood, & Findlay, 1997). Επιπλέον, ενισχύεται η ικανότητα της πρόβλεψης των επόμενων ήχων στις τονικές ακολουθίες, ιδιαίτερα όταν αποτελούν μέρος μιας τονικής μελωδίας ή γνωστών μοτίβων.

Η ανάγκη για αναγνώριση μοτίβων και συγχρονισμό έχει τις ρίζες της στη φύση. Τα μεγάλα ζώα που κινηθούν τα μικρότερα, συγχρονίζουν ρυθμικά τα βήματά τους προκειμένου να τα πιάσουν (Fischinger & Kopiez, 2008, σ. 460) όπως και οι χιμπατζήδες συγχρονίζουν τις φωνές τους προκειμένου να αυξήσουν την απόσταση από την οποία μπορούν να ακουστούν (Merker, 2000).

Δραστηριότητες όπως το σχοινάκι, το πήδημα πάνω από λακκούβες με λασπόνερα και ο χορός, αποτελούν περιπτώσεις όπου γίνεται εξάσκηση στον συντονισμό και την αναγνώριση μοτίβων (Spychiger, 2015a). Η αναγνώριση μοτίβων και η ομαδοποίηση μας επιτρέπουν να κάνουμε πράγματα συγχρόνως: να περπατάμε σε παρέλαση, να κωπηλατούμε, να χτυπάμε παλαμάκια κ.ά. Ως εκ τούτου, όταν τα πράγματα γίνονται σε απόλυτο συγχρονισμό, είναι δυνατότερα και αποτελεσματικότερα.

Η ομαδοποίηση είναι επίσης μια σημαντική τεχνική που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απομνημόνευση αριθμών. Η βραχυπρόθεσμη μνήμη των ανθρώπων μπορεί να συγκρατήσει (κατά μέσο όρο) μέχρι επτά στοιχεία. Αν χρειαζόταν να αποστηθίσουμε τον αριθμό 1685175017561791, θα μπορούσαμε να τον τεμαχίσουμε σε ομάδες όπως 1685, 1750, 1756 και 1791, που είναι τα έτη γέννησης και θανάτου του Γ.Σ. Μπαχ και του Β.Α. Μότσαρτ αντίστοιχα. Εάν δεν βρούμε ένα τόσο βολικό παράδειγμα, ομάδες των δύο ή τριών αριθμών (π.χ. για να απομνημονεύσουμε έναν αριθμό τηλεφώνου) δουλεύουν καλύτερα. Αυτό συνδέεται με το ρυθμό, όταν ομαδοποιούμε τα γεγονότα σε δυάδες ή τριάδες. Οι δραστηριότητες ομαδοποίησης είναι μερικά από τα παραδείγματα που περιλαμβάνονται σε αυτό το εγχειρίδιο. Η αναγνώριση μοτίβων βρίσκεται στον πυρήνα των κοινών χαρακτηριστικών σε μαθηματικές και μουσικές δραστηριότητες.

Σε όλα τα είδη ανθρώπινης δραστηριότητας, οι άνθρωποι δείχνουν ότι είναι ικανοί όχι μόνο να αναγνωρίζουν μοτίβα, αλλά να τα δημιουργούν και να τα παράγουν. Η συγκεκριμένη παραδοχή εστιάζει στο μοντέλο του κύκλου της σημειωτικής λειτουργίας της ανθρώπινης συμπεριφοράς, που ενστερνίζεται την ενσωμάτωση των δύο αυτών απόψεων, αφενός της αντίληψης και, αφετέρου, της δράσης, όπως εξηγείται στο επόμενο κεφάλαιο (Εικόνα 1).

### 2.3 Η μουσική και τα μαθηματικά ως αλληλεπικαλυπτόμενα και αλληλοεπιδρώντα συστήματα σημείων

Ο Πυθαγόρας ήταν ένας από τους πρώτους ανθρώπους που περιέγραψε τον ήχο και το τονικό ύψος ως μαθηματικές σχέσεις, βασισμένος στο σύστημα των αρμονικών. Αυτή η μουσική διαφώτιση προσέθεσε διανοητική, ανθρώπινη αξία στη μουσική, η οποία προηγουμένως αποτελούσε μέρος του θείου κόσμου. Από τότε και μετά, η μουσική θεωρείται «ακαδημαϊκός κλάδος». Η μουσική πρακτική χωρίστηκε στα δύο επαγγελματικά πεδία «*musicus* και *cantor* [...] κατά την πρώτη χιλιετηρίδα μ.Χ.», προκειμένου να διαχωριστούν τα συναισθηματικά στοιχεία της μουσικής από τα διανοητικά της στοιχεία (Sprychiger, 1995, σ. 54). Αυτή η διχοτόμηση τελικά οδήγησε στην πεποίθηση ότι η μουσική ήταν πράγματι ένα μαθηματικό σύστημα. Ενώ το διανοητικό μέρος της μουσικής, το μέρος εκείνο που μπορεί να εξηγηθεί μαθηματικά, ανήκει στους ανθρώπους, η συναισθηματική αξία της μουσικής έχει εξασθενήσει.

Αυτή η σχέση μεταξύ μουσικής και μαθηματικών οδήγησε στην ιδέα ότι η μουσική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αυξηθεί η μαθηματική γνώση, η ακαδημαϊκή επίδοση και η νοημοσύνη γενικότερα (Kelstrom, 1998). Σχετικές έρευνες κατέληξαν εντέλει στο να ανακαλύψουν το λεγόμενο φαινόμενο Μότσαρτ (Hilton, Saunders, Henley, & Henriksson, 2015, σ. 18), υποστηρίζοντας ότι η διανοητική ικανότητα μπορούσε να αυξηθεί ακούγοντας τη μουσική του Μότσαρτ (Rauscher, Shaw, & Ky, 1995). Επίσης, έχουν πραγματοποιηθεί μελέτες για να αποδείξουν ότι η αυξημένη μουσική παιδεία έχει θετικές συνέπειες πάνω στην κοινωνική συμπεριφορά, την αυτοαντίληψη και την παρώθηση (Costa-Giomi, 2004· Smolej Fritz & Peklaj, 2011). Όμως, όλα αυτά τα ευρήματα απέδειξαν ότι τα οφέλη από τη μουσική εκπαίδευση δεν ήταν μεγαλύτερα από τα οφέλη που προκύπτουν από την τακτική ενασχόληση με τον αθλητισμό (Simpkins, Vest, & Becnel, 2010).

#### Ο Πυθαγόρας και η μουσική

Η πρώτη αναφορά στην περιγραφή της μουσικής με μαθηματικά σύμβολα προέρχεται από τον Πυθαγόρα (Henning, 2009· Weber, 1991), ο οποίος ανακάλυψε τις φυσικές αρχές στις οποίες βασίζεται η δυτική μουσική. Χρησιμοποίησε το μονόχορδο για να κάνει τα πρώτα πειράματα και ανακάλυψε ότι η σχέση των αρμονικών είναι συνεχής και σχετίζεται με το μήκος της χορδής. Επιπλέον, οι σχέσεις 2:3:4:5 των πρώτων τεσσάρων αρμονικών είναι θεμελιώδεις και στη γεωμετρία καθώς χρησιμοποιούνταν και στις Αιγυπτιακές πυραμίδες αλλά και σε τάφους (Weber, 1991, σσ. 19–20).

Πέρα από αυτό, όμως, το αρμονικό σύστημα είναι πολύ πιο περίπλοκο και η ανάπτυξη μιας μοντέρνας κλίμακας με βάση μόνο αυτές τις αρχές είναι σχεδόν αδύνατη (Hindemith, 1940). Μόνο

τα διαστήματα ογδόης, πέμπτης, τετάρτης και τρίτης αποτελούν θεμελιώδη μέρη του αρμονικού συστήματος. Οτιδήποτε άλλο, είτε αποτελεί θεωρητικό κατασκευάσμα, είτε έχει ενσωματωθεί κατά τη διάρκεια των ετών, χωρίς να μπορεί εύκολα να εξηγηθεί, μέσα από το αρμονικό σύστημα.

### **Αριθμητικά σύμβολα στο έργο του Γ. Σ. Μπαχ και άλλων**

Μια άλλη σημαντική μουσικο-μαθηματική συζήτηση αφορά στη συμβολική χρήση των αριθμών στην αναγεννησιακή και στη μπαρόκ μουσική (Achermann, 2003· Egeler-Wittmann, 2004· Stoll, 2001a). Μια κυρίαρχη τεχνική είναι η κωδικοποίηση και η ενσωμάτωση των ονομάτων μέσω των αριθμών σε μουσικές συνθέσεις. Κάθε γράμμα συνδέθηκε με τη θέση του στο αλφάβητο (a=1, b=2, κ.λπ.) και έτσι τα ονόματα υπολογίστηκαν σε αθροίσματα. Οι αριθμοί που προέκυψαν χρησιμοποιήθηκαν για να καθορίσουν τον αριθμό των διαστολών ή/και των νοτών ανά τμήμα. Ο Γ.Σ. Μπαχ, για παράδειγμα, είχε μια ιδιαίτερη σχέση με τον αριθμό 14 (Buchborn, 2004). Ένα άλλο παράδειγμα αυτής της τεχνικής, όπως υποστηρίζει ο Stoll (Stoll, 2001a), είναι η αποκάλυψη των ονομάτων των ανθρώπων που στήριζαν οικονομικά τον συνθέτη ενσωματωμένα σε ένα κομμάτι μουσικής.

Παρόλο που κάτι τέτοιο αποδεικνύει τη χρήση των αριθμών, των μαθηματικών σχέσεων και των βασικών μαθηματικών στη μουσική, καταδεικνύει επίσης και την επιθυμία των συνθετών να μεταδώσουν κωδικοποιημένα μηνύματα που ίσως μόνο οι ίδιοι γνώριζαν, αξιοποιώντας τη μαθηματική σκέψη κατά τη διαδικασία της μουσικής σύνθεσης.

### **Αριθμοί, σειρές και συμμετρίες – η σύγχρονη μουσική και η ανάγκη για τυπική δομή**

Μετά την εγκατάλειψη του αρμονικού συστήματος και των τυπικών συνεπειών του στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, οι συνθέτες άρχισαν να αναζητούν νέα συστήματα για να δώσουν στη μουσική μια διακριτή τυπική δομή. Έτσι, ο σειραϊσμός ξεκίνησε αρχικά να οργανώνει όλες τις μουσικές παραμέτρους (διάρκεια, ένταση και τονικό ύψος) γύρω από τα 12 ημιτόνια. Ωστόσο, αυτό δεν οδήγησε στο να βρεθεί μια λύση για την τυπική δομή ολοκληρωμένων έργων. Οι πρώτες σειραϊκές συνθέσεις (π.χ. *Mode de valeurs et d'intensités* του Messiaen, 1949) φαίνονται σαν να αρχίζουν και να τελειώνουν χωρίς κανένα λόγο· θα μπορούσαν να συνεχίζονται για πάντα. Έτσι το σύστημα των μη αναστρέψιμων ρυθμών κατέδειξε τη νέα ανάγκη για συμμετρία στη μουσική· εν πρώτοις, ο Messiaen δεν βρήκε λύση ο ίδιος.

Αργότερα, οι Pierre Boulez, Luigi Nono και Karlheinz Stockhausen ανέπτυξαν συστήματα που χρησιμοποιούσαν προκαθορισμένες αριθμητικές σειρές ως βασικές αρχές για τις συνθέσεις τους. Χρησιμοποιούσαν μια μέθοδο για να υπολογίσουν πίνακες με αριθμούς, οι οποίοι όχι μόνο καθόριζαν πλευρές μεμονωμένων νοτών (χρόνος, ύψος, δυναμική), αλλά επίσης και πλευρές της τυπικής δομής ολόκληρου του μουσικού κομματιού (συνολική διάρκεια, μέτρο, αριθμός διαστολών) (Decroupet, 1995· Henning, 2009· Lehmann, 2009· Stoll, 2001b). Πολύ δημοφιλείς εκείνη την εποχή ήταν οι αριθμοί Fibonacci και η Χρυσή Τομή, οι οποίοι σχετίζονται μεταξύ τους. Με αυτές τις τεχνικές, οι συνθέτες ήθελαν να επαναφέρουν της υψηλής ποιότητας συμμετρίες και κανόνες στις συνθέσεις τους, οι οποίες είχαν χαθεί μαζί με την υποχώρηση του αρμονικού

συστήματος και των εγγενών του συμμετριών. Μια άλλη προσέγγιση παρουσιάζει ο Tom Johnson, ο οποίος «μετρά» τη μουσική (Nimczik, 2002).

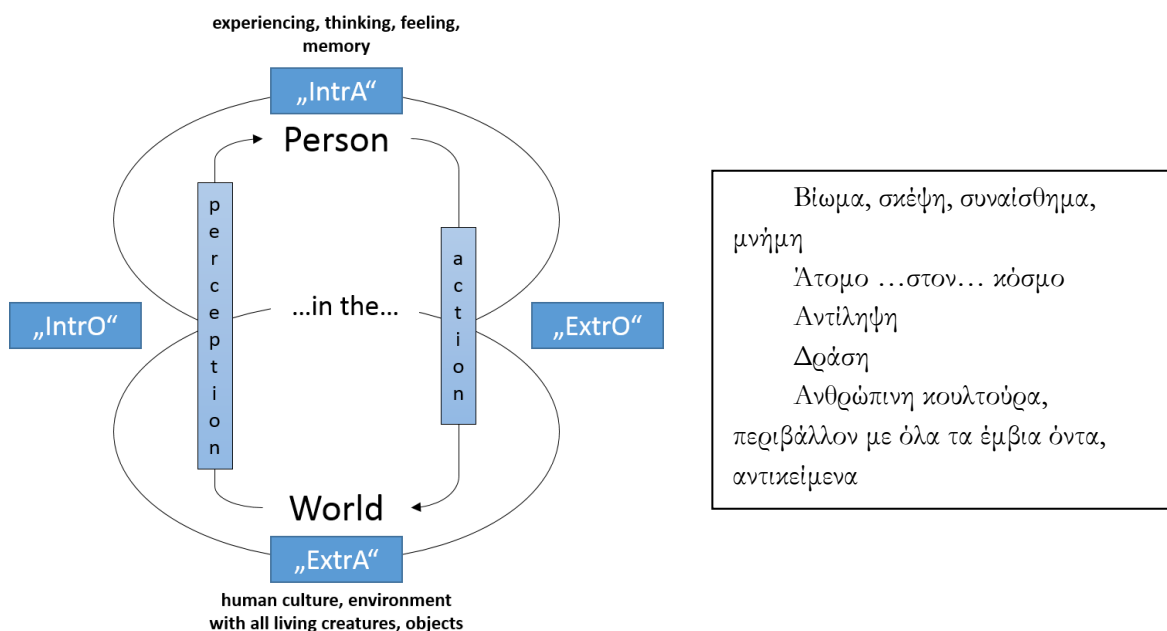
Η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής, σε αυτή την περίπτωση, δεν οφειλόταν στο ότι η μουσική είναι ιδιαίτερα κοντά στα μαθηματικά, αλλά στο ότι οι μουσικές παράμετροι μπορούν να μεταβληθούν και να οργανωθούν χρησιμοποιώντας μαθηματικές τεχνικές και το αντίστροφο. Τα συστήματα σημείων που βρίσκονται στη βάση της μουσικής (η γραφική απεικόνιση σε νότες / σημειογραφία) και τα μαθηματικά (αριθμοί) είναι, σε κάποιο σημείο, συμβατά. Οι μαθηματικές σχέσεις και συμμετρίες χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τη μουσική δομή.

### Σημειωτικές θεωρίες στα μαθηματικά και στη μουσική

Οι πρώτες σημειωτικές θεωρίες περιέγραφαν την επικοινωνία ως μια γραμμική διαδικασία όπου η πληροφορία μεταφερόταν κατ' ευθείαν από το ένα άτομο στο άλλο. Αντίθετα, ο Charles S. Pearce ανέπτυξε την τριαδική κατηγοριοποίηση της σημειωτικής διαδικασίας με το σύστημα υποκείμενο-αντικείμενο-σημείο. Ωστόσο, αυτό το σύστημα ορίζει διαδικασίες επικοινωνίας. Έτσι, η μουσική δεν εκλαμβάνεται ως σύστημα σημείων, αφενός, διότι «δεν έχει ένα αντικείμενο να εκφράσει» (Spychiger, 2001, σ. 55) και, αφετέρου, διότι δεν αποτελεί βάση για μια έγκυρη επικοινωνιακή διαδικασία.

Ο Alfred Lang (1993) ανέπτυξε ένα σημειωτικό μοντέλο βασισμένο στο πώς ο άνθρωπος σχετίζεται με τον κόσμο. Θεωρεί τα συστήματα σημείων σαν τη βάση της ανθρώπινης αντίληψης και δράσης με συνεχή τρόπο, όπως φαίνεται στο κύκλο της σημειωτικής λειτουργίας (εικόνα 1).<sup>3</sup> Αυτή η προσέγγιση αρνείται την ανάγκη για μια διάκριση ανάμεσα στο υποκείμενο και το αντικείμενο και, αντίθετα, κάνει διάκριση μεταξύ διαδικασιών που «λαμβάνουν χώρα εντός του ατόμου και [...] εκτός του ατόμου» (Spychiger, 2001, σ. 57), χρησιμοποιώντας τους όρους «παριστάμενος» ('presentant') (στη θέση του αντικειμένου) και «διερμηνευτής» ('interpretant') (στη θέση του υποκειμένου). Οι μουσικές νοητικές διεργασίες, λοιπόν, λαμβάνουν χώρα με κυκλικό τρόπο: μια *μουσική αντίληψη* ('IntrO', αυτό που εισέρχεται) οδηγεί σε μια *μουσική εμπειρία* ('IntrA', αυτό που συμβαίνει εντός του ατόμου), η οποία μπορεί να επιφέρει *μουσική παραγωγή* ('ExtrO', αυτό που βγαίνει από το άτομο προς τον κόσμο). «Αυτές οι μουσικές δράσεις φανερώνονται κατόπιν έξω από το άτομο: ως *μουσική κουλτούρα*» (δηλαδή 'ExtrA', ό π., σ. 58). Αυτό το σημείο κλείνει τον κύκλο, πράγμα που κατόπιν δημιουργεί και πάλι νέες ευκαιρίες για μουσική αντίληψη (όπως δείχνουν τα βέλη στην Εικόνα 1).

<sup>3</sup> Περισσότερα στο Spsychiger (2001, σ. 56).



Εικόνα 1: Γενικό ψυχολογικό μοντέλο της σχέσης ατόμου-κόσμου.  
Κύβλος της σημειωτικής λειτουργίας (Lang, 1993)

Η κατανόηση της μουσικής ως ένα ανεξάρτητο σύστημα σημείων καθιστά δυνατή τη σύγκριση της με άλλα συστήματα, π.χ. μαθηματικά συστήματα, χωρίς να παραβλέπει την αυτονομία της. Ερευνώντας, μπορούμε να ανακαλύψουμε μουσικές αρχές οι οποίες μπορούν να εξηγηθούν μαθηματικά. Η μουσική είναι γεμάτη συμμετρίες και η μουσική σημειογραφία αποτελεί ένα τέτοιο σύστημα το οποίο διέπεται από μαθηματική ακρίβεια.

Η εγκατάλειψη της γραμμικής σκέψης έδωσε τη δυνατότητα για πολλά περισσότερα συστήματα σημείων, ενώ κι άλλες επικοινωνιακές πλευρές (χειρονομίες, μιμική) μπορούσαν να εκληφθούν ως ανεξάρτητα συστήματα σημείων. Στην πράξη, κατά την επικοινωνία, όλα αυτά τα συστήματα αλληλεπιδρούν και χτίζουν μια σημειωτική ενότητα (Arzarello, 2015). Στις σύγχρονες εκπαιδευτικές θεωρίες για τη διδασκαλία και τη μάθηση, αυτές οι ενότητες παίζουν σημαντικό ρόλο, διότι, με αυτή την προσέγγιση, οι διδακτικές διαδικασίες και η διάδραση στην τάξη μπορούν να περιγραφούν με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια.

Με τη μουσική και τα μαθηματικά ως κανονικά συστήματα σημείων και με τη θεωρία των σημειωτικών δεσμών, τα διαθεματικά σχέδια εργασίας έρχονται να αποκτήσουν νέο νόημα. Όπως οι χειρονομίες και η μιμική συμπληρώνουν την προφορική επικοινωνία, έτσι και τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξηγήσουν τη μουσική και το αντίστροφο. Για να το ονομάσουμε απλά, χρησιμοποιούμε τον όρο *μεταφορά*, π.χ. η μαθηματική αρχή του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου αποτελεί μια μεταφορική περιγραφή των πολυρρυθμικών διαδικασιών. Αντίστροφα, οι αρμονικές αποτελούν μεταφορές για τις σταθερές αναλογίες και τα κλάσματα. Όπως ακριβώς και οι μεταφορές στην ποίηση, έτσι και οι δικές μας μεταφορές δεν αντιπροσωπεύουν ακριβώς βασικές αρχές, αλλά μας βοηθούν να κατανοήσουμε τις σχέσεις και τις αρχές.

Παρόλο που δεν πιστεύουμε ότι η μουσική είναι ένα μαθηματικό σύστημα και το αντίστροφο, υπάρχουν πολυάριθμες συνδέσεις μεταξύ της μουσικής και των μαθηματικών (Bamberger, 2010· Brüning, 2003· Christmann, 2011· Lorenz, 2003). Με την έννοια των σημειωτικών ενοτήτων

θέλουμε να αναπτύξουμε δημιουργικά μαθησιακά περιβάλλοντα (όπως θα δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 4.1), προκειμένου να φέρουμε κοντά διάφορα σημειωτικά συστήματα.

### 3 Δομώντας τη μάθηση

#### 3.1 Από την άσκηση ως καθήκον στον οικοδομισμό

Αυτό το κεφάλαιο διαπραγματεύεται δύο πλευρές της μάθησης. Η άσκηση συμβολίζει το σημείο εκκίνησης μιας μαθησιακής διαδικασίας. Οι ασκήσεις χαρακτηρίζονται από το «ότι πάντοτε αναφέρονται σε κάτι που λείπει» (Girmes, 2003, σ. 6). Με αυτόν τον τρόπο, η άσκηση, ως καθήκον, πάντα θα μεταμορφώνεται σε μια πηγή μάθησης, διότι οι μαθητές θα χρειαστεί να κλείσουν το διαπιστωμένο μαθησιακό κενό. Φυσικά, είναι απαραίτητη η διάκριση ανάμεσα στα «καθήκοντα ζωής» και στα «σχολικά καθήκοντα» (Girmes, 2003, σ. 8). Τα «καθήκοντα ζωής» προκύπτουν «κατά τη συνάντηση του ανθρώπου με τον κόσμο, χωρίς κανείς να ορίζει καθήκοντα για άλλους...». Τα καθήκοντα στο σχολείο, τα λεγόμενα «μαθησιακά καθήκοντα» (ό.π., σ. 10), ορίζονται και σχεδιάζονται από επαγγελματίες.

Οι συνθήκες που προκύπτουν από το θεσμικό πλαίσιο και η κοσμοθεωρία του εκπαιδευτικού αποκτούν αποφασιστική σημασία κατά τη διαδικασία δόμησης ανάλογων καθηκόντων. Ο βαθμός ελευθερίας τέτοιων καθηκόντων κυμαίνεται από χαμηλός μέχρι υψηλός και αναφέρεται στο πλαίσιο δράσης της εκτέλεσης των καθηκόντων. Εάν οι διαδικασίες και τα αποτελέσματα είναι επακριβώς καθορισμένα, τα περιθώρια για τους μαθητές είναι πολύ περιορισμένα. Από την άλλη, ο βαθμός ελευθερίας των ανοιχτών καθηκόντων, που ενυπάρχουν σε μαθησιακά περιβάλλοντα, είναι συχνά υψηλός. Αξιοποιώντας τις προσωπικές πρότερες γνώσεις, οι γνωσιακές ικανότητες, τα ενδιαφέροντα και τα κίνητρα των μαθητών μπορούν να ενεργοποιηθούν με ποικίλους τρόπους κατά την επεξεργασία των ασκήσεων που τους έχουν ανατεθεί. Η ποικιλία της διαφορετικής αντίληψης οδηγεί στη διαφορετική πρόσληψη και ως εκ τούτου σε διαφορετικό κάθε φορά αποτέλεσμα.

Η έννοια του οικοδομισμού εμπεριέχεται στην ακόλουθη μαθησιακή διαδικασία: Η έννοια της μάθησης τονίζει την ατομική δραστηριότητα του καθενός. Ο δάσκαλος κάνει προτάσεις, τις οποίες ο μαθητής δέχεται προκειμένου να υποστηρίξει την ενεργή και αυτοελεγχόμενη δόμηση της γνώσης. Επιπλέον, ο χειρισμός των καταστάσεων σε συγκεκριμένες μαθησιακές διαδικασίες εστιάζει στην αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και δασκάλων (Gerstenmaier & Mandl, 1995· Greeno, 1989), προκειμένου να υιοθετηθούν συγκεκριμένα συμπεριφοριστικά, κοινωνικο-πολιτισμικά και παρωθητικά πλαίσια, με τη βουλητική συναίνεση των μαθητών.

Η ενασχόληση με ασκήσεις στα μαθηματικά αποτελεί μια σημαντική έκφραση του κοινού εκπαιδευτικού έργου μαθητών και δασκάλων. Λόγω της ανομοιογένειας των μαθητών, οι ασκήσεις δίνουν τη δυνατότητα λύσης μέσα από μια ευρεία επιλογή διαφορετικών προσεγγίσεων, π.χ. η επεξεργασία τους μπορεί να γίνει ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών και τις μαθηματικές ή μουσικές γνώσεις που διαθέτουν. Συχνά, μετά από μια φάση ατομικής ενασχόλησης, οι ξεχωριστές προσεγγίσεις συζητούνται σε μεγαλύτερες ομάδες. Στο προσκήνιο βρίσκεται η ενεργοποίηση των μαθητών, με την έννοια της ανακάλυψης των μαθηματικών ή της μουσικής.

Πολύ συχνά, η προσέγγιση «σιέπτομαι» - «συνδιαλέγομαι» - «κοινοποιώ» (Barzel, Büchter, & Leuders, 2007, σσ. 118–123) επιτρέπει, αρχικά, σε ένα άτομο να αναλύσει την άσκηση - καθήκον ανεπηρέαστα από τις ιδέες των άλλων μαθητών. Η φάση της дуάδας («συνδιαλέγομαι») αποσκοπεί

στο να γίνει μια ανταλλαγή με τον συνεργάτη: η περιορισμένη δημόσια έκθεση σε αυτή τη φάση αφήνει χώρο για ημιτελείς σκέψεις. Μόνο το τελευταίο βήμα («κοινοποιώ»), περιλαμβάνει πλέον ολόκληρη την τάξη. Αυτό συνήθως γίνεται με τη μορφή παρουσιάσεων, που συζητούνται κατόπιν στην ολομέλεια. Ο τρόπος επίλυσης των ασκήσεων οδηγεί στην ατομική δόμηση γνώσεων, οι οποίες, κατά τη φάση της δυάδας και της ομάδας, μπορούν να αναπτυχθούν περαιτέρω μέσα από τη συζήτηση: αυτό εν τέλει οδηγεί σε διαδικασίες συν-δόμησης. Η έννοια της συν-δόμησης αναφέρεται στην από κοινού δόμηση γνώσης, που επιτυγχάνεται μέσω κοινωνικής ανταλλαγής (Brandt & Höck, 2011).

Αντίθετα από τη μαθηματική μάθηση, η μουσική μάθηση συχνά ξεκινά με ομαδικές διαδικασίες. Χαρακτηριστικά, μέσα στην ομάδα γίνεται δυνατή η μουσική μάθηση μέσω αλληλεπίδρασης, π.χ. «ερώτηση και απάντηση» (Spychiger, 2015a, σ. 57). Στο μάθημα της μουσικής, έχει σημασία να αποκτούν οι μαθητές βιωματικές εμπειρίες με την αποτελεσματικότητα ατομικών δράσεων μέσα στο πλαίσιο κοινών δράσεων. Για παράδειγμα, το ατομικό τραγούδι μέσα στη χορωδία, σαν μέρος ενός ευρύτερου συνόλου, μπορεί να καταφέρει να βρει έκφραση σε κοινές εκτελέσεις (Spychiger, 2015a, σ. 53). Η μίμηση, επίσης, παίζει σημαντικό ρόλο στη μουσική μαθησιακή διαδικασία, ειδικά όταν κάποιος διδάσκεται/μαθαίνει να παίζει ένα όργανο.

Και οι δύο μαθησιακές διαδικασίες, τόσο στα μαθηματικά όσο και στη μουσική, συνυφάνονται με κυκλικό τρόπο μεταξύ των πόλων «ατομική μάθηση» και «ομαδική μάθηση», για να βελτιώσουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων. Σε γενικές γραμμές, η μαθηματική και η μουσική μάθηση, υπό μια εποικοδομιστική έννοια, μπορούν να περιγραφούν ως κοινωνικές διαδικασίες που βασίζονται στη δράση και απαντώνται εντός πλαισίου (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001; Sychiger, 2015a).

Οι δραστηριότητες του προγράμματος εμπεριέχουν όλα τα προαναφερθέντα στοιχεία καθώς διαθέτουν τις προϋποθέσεις εκείνες για να δομήσουν και για να συν-δομήσουν αρχές, αξιοποιώντας τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις των μαθηματικών και της μουσικής.

### **3.2 Αντίληψη και δράση**

Η αντίληψη και η δράση αποτελούν κεντρικά στοιχεία του κύκλου σημειωτικής λειτουργίας, ο οποίος περιγράφει την αλληλεπίδραση ατόμου-κόσμου: η αντίληψη φέρνει πληροφορίες στο άτομο, ενώ, μέσα από τη δράση, το άτομο αλληλεπιδρά με τον κόσμο. Μέσα στο άτομο, η αντίληψη δημιουργεί γνώση και η δράση δημιουργεί κουλτούρα στον κόσμο (Βλ.Κεφάλαιο 2.3, Εικόνα 1).

Στη μουσική εκπαίδευση, αυτή η ενότητα δεν ήταν πάντα προφανής, καθώς, για πολλά χρόνια, η μουσική εκπαίδευση δεν ήταν τίποτα περισσότερο από μαθήματα τραγουδιού. Μόνο στη δεκαετία του 1920 (στη Γερμανία), με τη μεταρρύθμιση του Leo Kestenberg, η μουσική εκπαίδευση μπόρεσε να αναπτυχθεί έτσι ώστε να βρει μια θέση στην επιστημονική κοινότητα και απασχόλησε τόσο την εκπαίδευση των δασκάλων όσο και τα σχολεία.

Για πολύ καιρό, ωστόσο, η δράση και η αντίληψη ταυτόχρονα αποτελούσαν απόψεις της φιλοσοφίας της μουσικής εκπαίδευσης (Spychiger, 1997). Ιδιαίτερη γνωστή είναι η συζήτηση μεταξύ του Bennett Reimer και του David Elliott. Από τη μια μεριά, ο Reimer ισχυριζόταν ότι



«τα σχολικά μουσικά προγράμματα υπάρχουν [μόνο] για να παρέχουν διάφορες κοινωνικές υπηρεσίες στις κοινότητες» (Reimer, 1989, σ. 24). Κατά συνέπεια, ήθελε να ενδυναμώσει την αντίληψη (τις αισθητικές εμπειρίες) της μουσικής στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Ο David Elliott, από την άλλη, επικρίνει την κυριαρχία της κλασικής μουσικής στο αναλυτικό πρόγραμμα και τις αντίστοιχες διδακτικές έννοιες, ειδικά την έλλειψη αποδοχής των συναισθηματικών στοιχείων (Elliott, 1987). Μαζί με τον Christopher Small, ο Elliott υποστηρίζει ότι η δημιουργία μουσικής αποτελεί κεντρικό στοιχείο στην τάξη (Elliott & Silverman, 2014· Small, 1998). Με τον κύκλο της σημειωτικής λειτουργίας, η Maria Sprychiger δείχνει τη σημασία και των δύο στοιχείων - της δράσης και της αντίληψης - για τη μουσική εκπαίδευση (Sprychiger, 1997), όπως φαίνεται στο γενικό μοντέλο για την ανθρώπινη ζωή ως ολότητα.

Στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση, η αλληλεπίδραση της αντίληψης και της δράσης αποικτά, επίσης, όλο και μεγαλύτερη σπουδαιότητα. Διαφορετικά επίπεδα επικοινωνίας θα συνεργαστούν στις σημειωτικές ενότητες (Arzarello, 2015) καθώς οι μαθητές χρησιμοποιούν κύκλους αντίληψης και δράσης, με σκοπό να αναπτυχθεί η μαθηματική τους κατανόηση.

Κεντρικό στοιχείο των μαθηματικών είναι η *προσεχτική ματιά*. Η ταυτοποίηση μοτίβων και η μετάφρασή τους σε ένα σύστημα σημείων αποτελεί κεντρικό μαθηματικό καθήκον. Οι επαναλήψεις, άρα και οι κανονικότητες, μπορούν να βρεθούν με την παρατήρηση των γραπτών συμβόλων. Αυτές οι κανονικότητες αποτελούν τη βάση για κατανόηση των μαθηματικών. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, οι μαθητές αναδομούν αυτή την προσέγγιση. Τα μαθηματικά καθήκοντα λειτουργούν ως ερεθίσματα για δραστηριότητες που εκτελούνται στο χαρτί. Με τις αναλύσεις αυτών των δραστηριοτήτων, με βάση την αντίληψη, οι μαθητές βρίσκουν τις κανονικότητες και τις μετασχηματίζουν σε επίγνωση.

Η ανακάλυψη μαθηματικών όψεων σε καθημερινά γεγονότα λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο. Μια διαδικασία προτυποποίησης μεταφέρει σημαντικές όψεις της πραγματικής κατάστασης σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο, που περιέχει τα κύρια δομικά στοιχεία της πραγματικής κατάστασης. Αυτό είναι το θεμέλιο ενός μαθηματικού μοντέλου. Η δράση αναγκάζει τα παιδιά να ανακαλύψουν μαθηματικές κανονικότητες και δομικές αρχές μέσα στην τάξη. Στην περίπτωση αυτή, το να κάνεις μαθηματικά θα μπορούσε να είναι η αντίστοιχη έννοια της μουσικής σύνθεσης – μουσικής δημιουργίας.

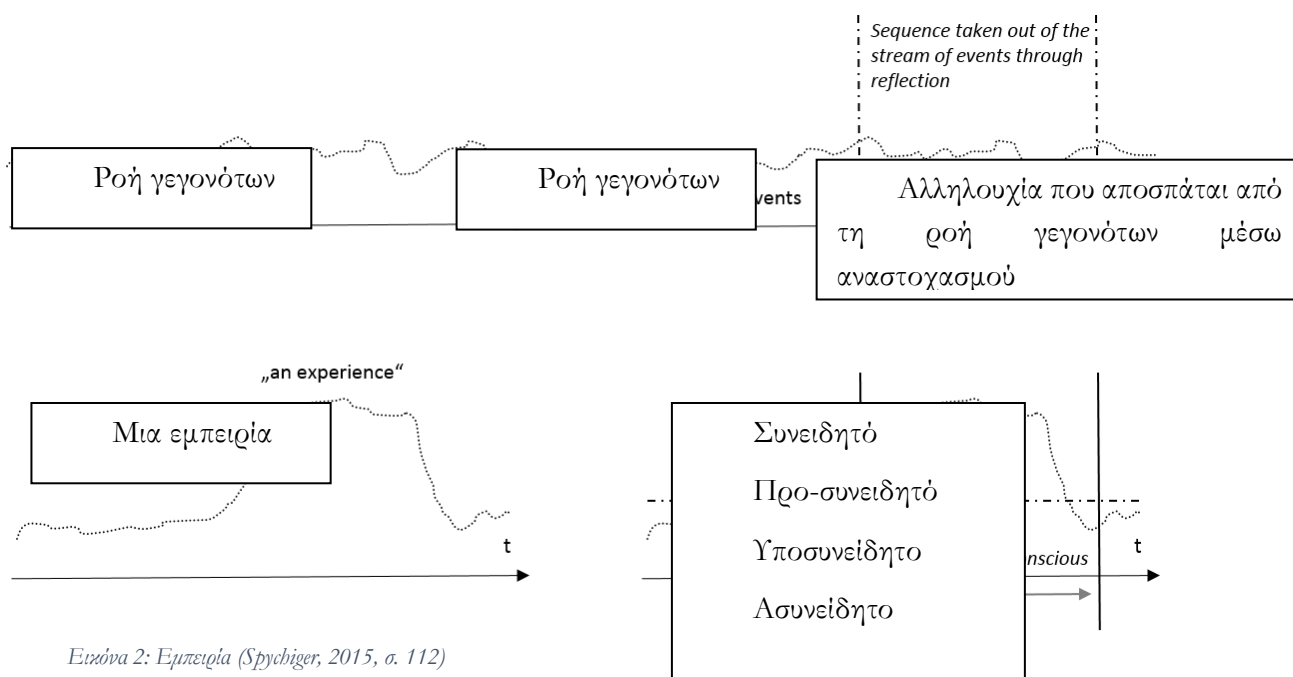
### 3.3 Δημιουργώντας εμπειρίες

Οι δραστηριότητες σε αυτό το πρόγραμμα δημιουργήθηκαν με στόχο την ανοικτότητα των μαθησιακών περιβαλλόντων σε μαθηματικές και μουσικές εμπειρίες. Ως εκ τούτου, τα περιεχόμενα της μουσικής και των μαθηματικών συγχωνεύονται, με αναμενόμενο αποτέλεσμα τη διευκόλυνση της κατανόησης των δύο τομέων. Τα διαθεματικά μαθησιακά περιβάλλοντα πλαισιώνουν αυτό το περιεχόμενο με διαφορετικούς τρόπους και έτσι επιτρέπουν εμπειρίες που δεν θα ήταν δυνατές σε μαθησιακές καταστάσεις με ξεχωριστά γνωστικά αντικείμενα.

Κατά την άποψη του John Dewey (1925· 1980/1934), η «εμπειρία» είναι ένα «διαδραστικό, περιεκτικό γεγονός, που περιέχει όχι μόνο γνωστικά, αλλά και θυμικά, συναισθηματικά και αισθητικά συστατικά» (Neubert, 2008, σσ. 234–235). Έτσι, ακολουθώντας τη δική του προσέγγιση,

τοποθετούμε στο κέντρο της μάθησης όχι τη νόηση αλλά την «εμπειρία». Εν πρώτοις, πριν από τον αναστοχασμό και τη σκέψη, βυθιζόμαστε σε συναισθήματα, αποκτώντας αισθητική αντίληψη εντρυφώντας σε τρέχουσες εντυπώσεις της κατάστασης (ό.π., σ. 235).

Μια ακολουθία αποσπάται διαισθητικά από τη «ροή των γεγονότων» (Spsychiger, 2015b, σ. 111) και μετατρέπεται σε ξεχωριστή εμπειρία (Βλ.Εικόνα 2). Η πραγματική εμπειρία είναι μια προσωρινά περιορισμένη μονάδα με συναισθηματική ποιότητα, περιγραφικό χαρακτήρα και περιεχόμενο που μπορεί να ονομαστεί: «Τα πράγματα εκείνα για τα οποία, όταν τα ανακαλούμε, λέμε ‘αυτό ήταν εμπειρία’ [...] –ένας καυγάς με κάποιον που κάποτε ήταν αγαπημένος, μια καταστροφή που παρά τριχά να συμβεί [...], εκείνο το γεύμα στο Παρισινό ρεστοράν [...]» (Dewey, 1980/1934, σ. 37). Σύμφωνα με τον Dewey, οι εμπειρίες χαρακτηρίζονται και από τον επικοινωνιακό τους χαρακτήρα. Μέσω της αλληλεπίδρασης, οι άνθρωποι μπορούν να συμμετέχουν στις εμπειρίες των άλλων και δυνάμει να βλέπουν τις δικές στους εμπειρίες από μια άλλη προοπτική (cf. Neubert, 2008, σ. 238).



Εικόνα 2: Εμπειρία (Spsychiger, 2015, σ. 112)

Με φόντο τη θεωρία του Dewey, οι δραστηριότητες του ΕΠΜ-Μαθηματικά προσφέρουν μαθησιακά περιβάλλοντα όπου οι εμπειρίες καθίστανται δυνατές.

Οι δραστηριότητες του ΕΠΜ-Μαθηματικά δημιουργήθηκαν για να προκαλέσουν συνδυαζόμενα μαθηματικά και μουσικά γεγονότα (Βλ.Εικόνα 2). Η βάση της κατάστασης που επιτρέπει στους συμμετέχοντες να βιώσουν νέες εμπειρίες με τα μαθηματικά και τη μουσική, ή και τα δύο, δημιουργείται μέσω της εστίασης σε μια επιλογή από μεμονωμένα γεγονότα, για παράδειγμα, μέσω αναστοχασμού και ομαδικών συζητήσεων. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να βοηθήσει, ώστε να αλλάξει η ασυνείδητη εικόνα των μαθηματικών και της μουσικής μέσω των εμπειριών που βιώνονται κατά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων του προγράμματος.

## 4 Εκπαιδευτικές απόψεις και δομή των δραστηριοτήτων

### 4.1 Διδακτικά και μαθησιακά περιβάλλοντα

Οι όροι «διδακτικό» και «μαθησιακό περιβάλλον» εμφανίστηκαν μια εποχή που αναπτύσσονταν εναλλακτικές προτάσεις στη δασκαλο-κεντρική εκπαίδευση. Η αναζήτηση νέων μορφών διδασκαλίας και μάθησης συνδέεται συχνά με μια αλλαγή στάσης απέναντι στην ίδια τη μάθηση. Σήμερα, οι εποικοδομιστικές προσεγγίσεις διαμορφώνουν το πώς κατανοούμε τη μάθηση. Η κυρίαρχη ιδέα για τη μάθηση αφορά την άποψη ότι πρόκειται για μια διαδικασία καταστασιακής δόμησης της γνώσης, η οποία είναι ενσωματωμένη σε συγκεκριμένο πλαίσιο και σε συγκεκριμένη κουλτούρα (Greeno, 1989). Εξάλλου, θεωρείται δεδομένο ότι η μάθηση δομείται ανάμεσα στον μαθητή και τον δάσκαλο (Krummheuer, 2007, σ. 62).

Η μάθηση, ως δόμηση γνώσης, μέσα σε μαθησιακά περιβάλλοντα, βασίζεται σε αρχές σχεδιασμού. Οι αρχές αυτές βρίσκουν την έκφρασή τους σε διαφορετικές εποικοδομιστικές διδακτικές προσεγγίσεις. Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων είναι η προσέγγιση της γνωστικής ευελιξίας, και η προσέγγιση της γνωστικής μαθητείας. Αυτές οι προσεγγίσεις, που μας έρχονται από τη δεκαετία του 1990, έχουν μια κοινή άποψη: ο δάσκαλος σχεδιάζει έναν «μαθησιακό χώρο», όπου στην ουσία οι μαθητές εισάγονται στην επαγγελματική σκέψη και δράση. Αυτά τα είδη των διδακτικών και μαθησιακών περιβαλλόντων μπορούν να περιγραφούν με τον εξής τρόπο: «ένα μαθησιακό περιβάλλον είναι ένας χώρος όπου τα άτομα μπορούν να εμπνεόνται από πηγές για να κατανοήσουν πράγματα και να βρουν λύσεις σε προβλήματα, οι οποίες να έχουν νόημα» (Wilson, 1996, σ. 3). Ο ορισμός ενός τέτοιου περιβάλλοντος εποικοδομιστικής μάθησης, σύμφωνα με τον Wilson (1996, σ. 5), είναι:

... ένας χώρος όπου οι μαθητές μπορούν να δουλεύουν μαζί και να υποστηρίζουν ο ένας τον άλλο, ενώ χρησιμοποιούν μια ποικιλία από εργαλεία και πηγές πληροφοριών σε καθοδηγούμενες δραστηριότητες, που τους επιτρέπουν να επιτυγχάνουν τους μαθησιακούς στόχους και να επιλύουν προβλήματα.

Ο ορισμός αυτός δείχνει καθαρά ότι τα διδακτικά και μαθησιακά περιβάλλοντα δημιουργούν χώρους για τον μαθητή και, την ίδια στιγμή, σχεδιάζονται από τον δάσκαλο. Άρα, η μάθηση σε αυτά τα περιβάλλοντα εξακολουθεί να είναι θεσμοθετημένη, καθώς προγραμματίζεται εκ των προτέρων και με συγκεκριμένο σχέδιο, ωστόσο παράγει δημιουργικούς χώρους έτσι ώστε ο μαθητής μόνος του να έρχεται σε επαφή με τα υλικά.

Η θεώρηση της διδασκαλίας ως περιβάλλον, δίνει έμφαση στον «τόπο» ή στον «χώρο» όπου λαμβάνει χώρα η μάθηση. Ένα μαθησιακό περιβάλλον περιλαμβάνει, κατ' ελάχιστον, τον μαθητή, το «σκηνικό» ή «χώρο» μέσα στον οποίο ενεργεί ο μαθητής, χρησιμοποιώντας εργαλεία και συσκευές, συλλέγοντας και ερμηνεύοντας πληροφορίες, συνεργαζόμενος πιθανόν με άλλους κτλ. (Wilson, 1996, σ. 4).

Σήμερα, ο όρος «μαθησιακό περιβάλλον» αναφέρεται συχνά μαζί με τον όρο «διαφοροποιώ», ειδικά σε συνδυασμό με τη «φυσική διαφοροποίηση». Είναι σημαντικό για τους μαθητές να βρίσκουν τους δικούς τους τρόπους να μαθαίνουν, τον δικό τους ρυθμό μάθησης και τον δικό τους τρόπο να ανακαλύπτουν πράγματα μόνοι τους. Τελευταία, ο όρος συν-δόμηση φαίνεται να γίνεται

όλο και πιο σημαντικός. Με τον όρο συν-δόμηση, η «επίτευξη του ατομικού σχεδίου» αποκτά έναν «πολιτισμικό χαρακτήρα» (Brandt & Höck, 2011, σ. 249).

Στον τομέα των μαθηματικών, αυτό ονομάζεται «ουσιώδες μαθησιακό περιβάλλον», το οποίο διαθέτει τις παρακάτω ιδιότητες:

Μαθηματική ουσία με ορατές δομές και μοτίβα (επαγγελματικό πλαίσιο): προσανατολισμό σε κεντρικές απόψεις· δυναμικό για ενεργοποίηση ανώτερων νοητικών λειτουργιών· δραστηριότητα προσανατολισμένη σε μαθηματικά περιεχόμενα και διαδικασίες· κίνητοποίηση της ανεξαρτησίας όλων των μαθητών· ενθάρρυνση για ατομικό τρόπο σκέψης και μάθησης, καθώς και τρόπους παρουσίασης κατ' επιλογή των μαθητών· πρόσβαση για τον καθένα· η μαθηματική δραστηριότητα πρέπει να είναι δυνατή σε ένα βασικό επίπεδο, χρήση της ικανότητας για σύνδεση με προηγούμενες γνώσεις· οι γρήγορα σκεπτόμενοι μαθητές να αντιμετωπίζουν την πρόκληση απαιτητικών προβλημάτων· διευκόλυνση της κοινωνικής ανταλλαγής και μαθηματικής επικοινωνίας (Hirt & Wälti, 2008, σ. 14).

Με τους ίδιους εκείνους χαρακτηρισμούς που χρησιμοποιούνται για τα μαθησιακά περιβάλλοντα θα μπορούσαν να περιγραφούν και οι δραστηριότητες του προγράμματος ΕΠΜ-Μαθηματικά. Προσφέρουν τη δυνατότητα για ενεργοποίηση υψηλών νοητικών λειτουργιών, το οποίο μπορεί να εντατικοποιηθεί αξιοποιώντας τη φυσική εμπειρία. Η εστίαση παραμένει σαφώς στη δραστηριότητα του ίδιου του μαθητή. Οι αμοιβαίες δραστηριότητες και εμπειρίες δημιουργούν χώρο για ανακάλυψη από τους μαθητές, πράγμα που ενσωματώνει την ατομική μαθησιακή πρόοδο με τη διασύνδεση μαθηματικών και μουσικής. Σε χώρους τέτοιους, που είναι ανοιχτοί στις ιδέες των μαθητών, μπορούν να δημιουργηθούν νέα μαθησιακά περιβάλλοντα. Όπως δείχνουν οι Cslovjcek και Linneweber (2011), οι μαθητές γίνονται ουσιαστικοί συνεργάτες στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης.

## 4.2 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού υλικού και του χώρου

Στα μαθηματικά, σε πολλές και διαφορετικές μαθησιακές διαδικασίες, χρησιμοποιούνται σχετικά *εκπαιδευτικά υλικά*. Τα υλικά λειτουργούν ως εργαλεία για τη φαντασία, ενεργοποιώντας τις διαδικασίες σκέψης ερμηνεύοντάς τες (Hülswitt, 2003, σ. 24). Τα οπτικά υλικά οπτικοποιούν μαθηματικές σκέψεις και βοηθούν τη μαθησιακή διαδικασία. Έτσι, οι δομές των μαθηματικών αντικειμένων, π.χ. οι αριθμοί, αποκτούν υλική υπόσταση. Οι δραστηριότητες με τέτοιο μαθηματικό υλικό μπορούν να δημιουργήσουν νοητικές εικόνες, π.χ. οι ακολουθίες κίνησης αντικαθίστανται από νοητικές εικόνες (Vogel, 2014). Η μουσική μάθηση συνοδεύεται από ήχους και μουσικά όργανα, καθώς και από οπτικά στοιχεία και ρυθμούς. Με αυτό τον τρόπο, τα *μουσικά υλικά* λειτουργούν ως τμήμα της μουσικής παραγωγής. Στο θεωρητικό πλαίσιο, η έννοια των νοητικών εικόνων, δεν τονίζεται αρκετά· αντίθετα, σημείο εστίασης γίνεται η αλληλεπίδραση ανάμεσα στον μαθητή και το υλικό (Vogel, 2014, σ. 231).

Σύμφωνα με τον Vygotsky, ένα υλικό λειτουργεί ως *διαμεσολαβητής*:

Οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες υπάρχουν για ένα διάστημα σε κατανεμημένη ή «μοιρασμένη» μορφή, όταν οι μαθητές και ο μέντοράς τους χρησιμοποιούν από κοινού νέα πολιτισμικά εργαλεία στο πλαίσιο εκτέλεσης κάποιων καθηκόντων. Αφού αποκτήσουν («σφετεριστούν», στην ορολογία του Vygotsky) μια ποικιλία από πολιτισμικά εργαλεία, τα

παιδιά αποκτούν την ικανότητα να χρησιμοποιούν ανώτερες νοητικές λειτουργίες ανεξάρτητα (Bodrova & Leong, 2001, σ. 9).

Το εκπαιδευτικό υλικό και ειδικά οι ανατεθειμένες δράσεις σε σχέση με τα υλικά, αντιπροσωπεύουν, από τεχνική άποψη, τη γλώσσα, τις προσεγγίσεις και το σκεπτικό μέσα σε μια λειτουργική, θεματοκεντρική κουλτούρα. Το εκπαιδευτικό υλικό λοιπόν, μπορεί να εξασφαλίσει πρόσβαση σε αυτόν τον θεματοκεντρικό κόσμο. Συγχρόνως, το εκπαιδευτικό υλικό παρέχει την ευκαιρία να συμπεριληφθεί και ο κόσμος των μαθητών (Vogel, 2014). Αποκτά διαμεσολαβητική λειτουργία τόσο στη μαθηματική όσο και στη μουσική μάθηση. Η πρώιμη εκπαίδευση συχνά αρχίζει με τα παιχνίδια (τα υλικά παιχνιδιού για τα παιδιά). Αυτό το παιγνιώδες υλικό αποκτά συγκεκριμένες λειτουργίες κατά τη διαδικασία της μαθηματικής ή μουσικής μάθησης. Ένα σύνολο αντικειμένων μετατρέπεται σε μια αναπαράσταση αριθμών, οι κατανομές στους πίνακες συνόλων θεωρούνται ως λειτουργικές σχέσεις και έτσι, για παράδειγμα, μια κατσαρόλα ή ένα κύπελλο μετατρέπεται σε όργανο παραγωγής ήχων.

Με τον χώρο να αποτελεί στοιχείο δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων, το ανθρώπινο σώμα εκλαμβάνεται ως η τρίτη διάσταση. Το άτομο βιώνει τον εαυτό του σε σχέση με τον περιβάλλοντα χώρο. Οι κινητικές ακολουθίες και οι κινήσεις του σώματος μπορούν να ερμηνευτούν με μαθηματικό τρόπο (Vogel, 2008). Οι κινήσεις του σώματος, όπως τα παλαμάκια, μπορούν γίνουν μέσα παραγωγής μουσικής.

### 4.3 Δομή των δραστηριοτήτων

Το παρόν εγχειρίδιο εκπαιδευτικού περιλαμβάνει έξι δραστηριότητες που αποτυπώνουν τις δυνατότητες συνδυασμού μαθηματικών και μουσικής μέσα στην τάξη. Η συγκεκριμένη δομή ακολουθεί ένα μοτίβο διδακτικού σχεδίου. Τα μοτίβα διδακτικών σχεδίων δημιουργήθηκαν κατ' αρχάς από τους Alexander et al. (1977), και κατόπιν «υιοθετήθηκαν στον χώρο διδασκαλίας και μάθησης» (Vogel, 2014, σ. 232). Τα μοτίβα σχεδίων περιγράφουν επαναλαμβανόμενα προβλήματα και προσφέρουν γενικευμένες λύσεις γι' αυτά (Vogel & Wippermann, 2011). Αυτό πραγματοποιείται μέσα από μια τυπική δομή, που περιγράφει (διδακτικές) καταστάσεις (μοτίβα) με τρόπο ανοιχτό και, συγχρόνως, τυποποιημένο. Τα παραδείγματα χρειάζεται να αναθεωρηθούν πολλές φορές μέχρι να πάρουν την τελική τους μορφή.

Όλες οι δραστηριότητες, που παρουσιάζονται στο πέμπτο κεφάλαιο, είναι δομημένες σε τέσσερα κύρια μέρη, το τρίτο από τα οποία, η *Εφαρμογή*, περιγράφει το περιεχόμενο της δραστηριότητας (Βλ.Εικόνα3).

Επισκόπηση	Προετοιμασία	Εφαρμογή	Παραλλαγές
<ul style="list-style-type: none"><li>• Τίτλος</li><li>• Θέμα</li><li>• Λέξεις-κλειδιά</li><li>• Σύντομη περιγραφή</li><li>• Σχέση με το συνδυασμένο γνωστικό αντικείμενο μουσικής και μαθηματικών</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά</li><li>• Προαπαιτούμενα στη μουσική</li><li>• Συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών και μουσικής</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Στόχοι</li><li>• Ομάδα-στόχος</li><li>• Χρονοδιάγραμμα</li><li>• Τυπική προσέγγιση</li><li>• Υλικά, εικόνες, μουσική</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Παραλλαγές</li><li>• Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική</li><li>• Άλλες προσεγγίσεις στα Μαθηματικά</li></ul>

Εικόνα 3: Η κοινή δομή σε όλα τα παραδείγματα του Μέρους 5

### Μέρος I: Επισκόπηση

Η συγκεκριμένη ενότητα παρέχει γενικές πληροφορίες για κάθε παράδειγμα, που διευκολύνουν την εύρεση των κατάλληλων δραστηριοτήτων για κάθε σκοπό. Οι λέξεις-κλειδιά που δίνονται και η σύντομη περιγραφή, προσφέρουν μια γρήγορη γνωριμία με τη δραστηριότητα. Καθώς πολλά από τα παραδείγματα βασίζονται σε απλές ιδέες, οι δάσκαλοι σε προχωρημένες τάξεις μπορούν να δουλέψουν με αυτή την επισκόπηση και με μια σύντομη ματιά στο τρίτο μέρος. Αλλά θα ήταν καλό να κοιτάζουν και τις παραλλαγές σε κάθε περίπτωση, καθώς πιστεύουμε ότι αυτό είναι το πιο σημαντικό μέρος για περαιτέρω ανάπτυξη των δραστηριοτήτων.

Το εγχειρίδιο συνοδεύεται από μια λίστα με «Βασικές δεξιότητες και κύρια χαρακτηριστικά» τόσο για τα μαθηματικά όσο και για τη μουσική. Κάθε δραστηριότητα συνδέεται με έναν συνδυασμό γνωστικών αντικειμένων, όπως αυτά προκύπτουν από τα αναλυτικά προγράμματα και τη μελέτη τους από όλες τις συνεργαζόμενες χώρες που συμμετέχουν στο πρόγραμμα.

### Μέρος II: Προετοιμασία

Η προπαρασκευαστική διερεύνηση εξασφαλίζει ότι οι μαθητές διαθέτουν όλες τις γνώσεις και τις δεξιότητες που χρειάζονται για αυτή τη δραστηριότητα. Κάποιες από αυτές μπορεί να είναι πιο σημαντικές από άλλες, αλλά φροντίζουμε ώστε οι δραστηριότητες να είναι διασκεδαστικές και οι μαθητές να μπορούν να τις χειριστούν με ευκολία, χωρίς να συναντούν σοβαρές δυσκολίες καθ' οδόν. Είναι σημαντικό να μελετήσετε με προσοχή αυτό το μέρος.

### Μέρος III: Εφαρμογή

Το τρίτο μέρος δίνει σύντομες οδηγίες για το πώς *θα μπορούσε* να εφαρμοστεί η δραστηριότητα στο σχολείο. Η δεδομένη τυπική προσέγγιση παρέχει ένα οδηγό για το πώς να ξεκινήσουμε. Είναι σαν τις κάρτες υπενθύμισης. Δεν είναι κάτι παραπάνω από μια σύντομη εισαγωγή και δεν μπορεί να αντικαταστήσει την κατάλληλη προετοιμασία μαθημάτων και θεμάτων. Επιπλέον, οι στόχοι, η

ομάδα-στόχος και το εκτιμώμενο χρονοδιάγραμμα δίνουν πιο λεπτομερείς πληροφορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην προετοιμασία της δραστηριότητας.

#### Μέρος IV: Παραλλαγές

Οι παραλλαγές όχι μόνο υποδεικνύουν διαφορετικές προσεγγίσεις στη δεδομένη δραστηριότητα, αλλά πολύ περισσότερο από αυτό, επιδιώκουν να μας αφυπνίσουν για να δούμε τον κόσμο της εγγάρσιας μάθησης πάνω στο συγκεκριμένο θέμα της δραστηριότητας. Οι δραστηριότητες που δίνονται σε αυτό το εγχειρίδιο είναι σύντομες και εύκολες. Κάθε δραστηριότητα μπορεί να θεωρηθεί ως μια πύλη που οδηγεί σε ένα νέο κόσμο ιδεών.

Τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται στο πρότυπο της Εικόνας 4. Το πρότυπο χρησιμοποιεί εικονίδια για γρήγορο προσανατολισμό στα μέρη:



Εικόνα 4: Η Δομή των παραδειγμάτων με εικονίδια

Το Μέρος I, η *Επισκόπηση*, συνοδεύεται από την εικόνα ενός *ματιού*.

Το Μέρος II, η *Προπαρασκευαστική Περιγραφή* των προαπαιτούμενων στα μαθηματικά και τη μουσική, χρησιμοποιεί την εικόνα ενός *τετραγώνου*. Αυτό το μέρος συγκεντρώνει επίσης το θεωρητικό υπόβαθρο που αφορά στη σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής και αποτελεί το πιο διανοητικό μέρος της παρουσίασης.

Το εικονίδιο για το Μέρος III, η *Εφαρμογή*, δείχνει ένα *κομμάτι παζλ*. Αυτό σημαίνει ότι η δραστηριότητα αυτή – με τους στόχους και τα χαρακτηριστικά της – συμβάλλει με χειροπιαστό τρόπο στη γενική ιδέα που αποτελεί τη βάση αυτής της προσέγγισης στη μάθηση: τους ηχηρούς δρόμους για τα μαθηματικά ή τους μαθηματικούς δρόμους για τους ήχους.

Τέλος, το εικονίδιο για το Μέρος IV, οι *Παραλλαγές*, δείχνει δύο *βέλη* που οδηγούν σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Σε αυτή την παράγραφο δίνονται παραλλαγές της δραστηριότητας, οπότε οι δάσκαλοι έχουν παραπάνω από έναν τρόπους για να την εκτελέσουν και ίσως, ελπίζουμε, να ενθαρρυνθούν να βρουν και οι ίδιοι περισσότερους τρόπους.

Ακολουθεί το σχέδιο εργασίας, σύμφωνα με το οποίο δομούνται οι δραστηριότητες του προγράμματος:

## Πρότυπο Δραστηριοτήτων - Τίτλος

---

Θέμα

Λέξεις-κλειδιά

Σύντομη περιγραφή

Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τον πυρήνα της μουσικής και των μαθηματικών

---

## Προετοιμασία

Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά

Προαπαιτούμενα στη μουσική

Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

---

## Εφαρμογή της δραστηριότητας

Στόχοι

Ομάδα-στόχος (ηλικία μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες, ...)

Χρονοδιάγραμμα

Δραστηριότητα – Τυπική προσέγγιση

Υλικά, εικόνες, μουσική – Χωρική διάταξη

---

## Παραλλαγές

Παραλλαγές

Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική

Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

---

## Βιβλιογραφία



## 5 Παραδείγματα

### 5.1 Ηχηρές διαδρομές γύρω από το σχολείο

#### Θέμα

Οι «ηχηρές διαδρομές γύρω από το σχολείο» αφορούν σε ηχοτοπία, στις σχέσεις τους και στις πιθανές αναπαραστάσεις τους.

#### Λέξεις-κλειδιά

Ηχοτοπία (ακουστικό περιβάλλον), ακρόαση, χρονογραμμές, σχέσεις.

#### Σύντομη περιγραφή

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές ακούν ήχους από το περιβάλλον του σχολείου, θα τους κατανειμουν σε ένα χρονοδιάγραμμα και θα διερευνήσουν ηχοτοπία μόνοι τους.

#### Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τον πυρήνα της μουσικής και των μαθηματικών

Μουσική: Εκτίμηση της μουσικής και ακουστική επίγνωση μέσω ακρόασης· διαφοροποιημένη αντίληψη ήχων· ικανότητα να περιγράφουν ήχους και θορύβους με βάση διάφορα κριτήρια· αναγνώριση της μεταβλητότητας ήχων και θορύβων· γραφική αναπαράσταση των νοτών.

Μαθηματικά: Γεωμετρία (μήκος, μετασχηματισμός)· μέτρηση (μήκος)· αριθμοί (εκτίμηση και σύγκριση)· χωρικός προσανατολισμός· σειροθέτηση· σχέσεις (και/ή, πριν, μετά, συγχρόνως)· και η θεωρία συνόλων.

### Προετοιμασία

#### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά

Βασικές δεξιότητες στον χωρικό προσανατολισμό και εκτίμηση χρόνου και αποστάσεων.

#### Προαπαιτούμενα στη μουσική

Βασικές δεξιότητες στην ακουστική επίγνωση των ήχων του περιγύρου.

#### Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

Η ακρόαση ενός ηχοπερίπατου και η αναγνώριση των καταγεγραμμένων ήχων συνδέει τον χωρικό προσανατολισμό και την εκτίμηση χρόνου και αποστάσεων με τους ήχους του περιβάλλοντος.

Η κατανομή ενός ήχου/γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρόνο σχετίζεται με την κατανομή απόστασης/χρόνου στα μαθηματικά. Η δημιουργία συμπλεγμάτων με βάση διαφορετικά κριτήρια (απόσταση, πηγή, διάρκεια, ένταση) οδηγεί σε κάποιες απόψεις της θεωρίας συνόλων.

## Εφαρμογή της δραστηριότητας

### Στόχοι

Να βελτιωθούν οι δεξιότητες ακρόασης των μαθητών και η ικανότητά τους να περιγράψουν ήχους.

Να κατανοήσουν ότι οι ήχοι συχνά είναι στιγμιαίοι και ότι οι αντιλήψεις και οι αναμνήσεις περί ήχων είναι υποκειμενικές.

Να κάνουν σωστή χρήση του χρονοδιαγράμματος και να ομαδοποιούν ήχους σε σύνολα σύμφωνα με διάφορα κριτήρια.

Να βρίσκουν σειριακές κατανομές (από το κοντινότερο στο πιο μακρινότερο, από το δυνατότερο στο χαμηλότερο, από το πρώτο στο τελευταίο κτλ.)

### Ομάδα-στόχος (ηλικία μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες κτλ.)

Ηλικίες: 6–11 ετών (+), μέχρι 30 μαθητές. Οι συζητήσεις μπορούν να διεξαχθούν και σε μικρότερες ομάδες.

### Χρονοδιάγραμμα

30 λεπτά για την τυπική προσέγγιση

### Δραστηριότητα – Τυπική προσέγγιση

Προετοιμασία: Ο εκπαιδευτικός καταγράφει τους θορύβους από έναν ηχοπερίπατο (για τον ορισμό, βλ. τις πηγές) στον περιβάλλοντα χώρο του σχολείου. (Όταν φοράμε «θορυβώδη» παπούτσια, τα πατώματα και οι αίθουσες θα ηχούν σε συνδυασμό με τους πολλούς άλλους ήχους και θορύβους του περιβάλλοντος.)

1. Στην τάξη, οι μαθητές ακούνε προσεκτικά την καταγραφή. Καθώς ακούνε, γράφουν ή σχεδιάζουν αυτό που πιστεύουν πως ακούνε στο απόσπασμα.
2. Συγκεντρώστε τις απαντήσεις σε κάρτες και συζητήστε τις με την τάξη. Κατηγοριοποιείστε τις με διάφορους τρόπους (πηγή, σχήμα, απόσταση, ένταση κτλ.) φτιάχνοντας συμπλέγματα και καταδεικνύοντας τις μεταξύ τους σχέσεις.
3. Μαζί με τους μαθητές, κατανείμειτε τους ήχους πάνω σε μια χρονογραμμή, σχεδιασμένη στον πίνακα ή στο πάτωμα με μια γραμμή ή με ένα σπάγκο και μανταλάκια. Η συζήτηση μπορεί να ξεκινήσει με τη σειρά των ήχων και αργότερα μπορεί να γίνει μια συζήτηση για το πόσος χρόνος μεσολαβεί μεταξύ των διαφόρων γεγονότων.
4. Κάντε τον ίδιο ηχοπερίπατο με τους μαθητές (αυτό μπορεί να γίνει και μια άλλη μέρα).

### Υλικά, εικόνες, μουσική – Χωρική διάταξη

Ηχογράφηση από τον εκπαιδευτικό, κατά προτίμηση ενός ηχοπερίπατου γύρω από το σχολείο (σας συνιστούμε αυτός ο περίπατος να μην ξεπερνά τα δύο λεπτά).

Συσκευές ηχογράφησης (εφαρμογές κινητού τηλεφώνου, μαγνητόφωνα ήχου κτλ.) (προτείνουμε την εφαρμογή 'soundOscope' για κινητά).

## Παραλλαγές

### Παραλλαγές

Κάντε μια άλλη ηχογράφηση (ή πείτε στους μαθητές να κάνουν μία) και συγκρίνετέ την με τον πρώτο ηχοπερίπατο. Τι είναι καινούριο, τι είναι ίδιο και τι έχει αλλάξει; Προσπαθήστε να εντάξετε τους νέους ήχους και θόρυβους στην αρχική χρονογραμμή.

Ομάδες μαθητών δημιουργούν έναν ηχοπερίπατο κοντά στο σχολείο και τον επεκτείνουν και το εξερευνούν σύμφωνα με την τυπική προσέγγιση (π.χ. υπό άλλες χρονικές και καιρικές συνθήκες).

Σε μεγαλύτερες τάξεις, μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν συσκευές πλοήγησης GPS για να ανιχνεύσουν και κατόπιν να δείξουν μια διαδρομή (π.χ. σε έναν δικτυακό χάρτη όπως το Google Maps).

Μοιραστείτε τους ηχοπεριπάτους σας με τάξεις από άλλα σχολεία.

### Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική

Συνδυάστε τους διάφορους ήχους με μια παρτιτούρα και παίξτε τους με όργανα. Χρησιμοποιείστε μεμονωμένους ήχους ως δείγματα για να δημιουργήσετε ένα ρυθμό.

Επινοείστε μια σημειογραφία για να περιγράψετε τους ήχους. Επινοείστε διαφορετικά, κατάλληλα σύμβολα για διαφορετικούς ήχους και την εξέλιξή τους.

Με τη συσκευή ηχογράφησης, μπορούν να καταγραφούν χαρακτηριστικοί ήχοι. Ποιος γνωρίζει τα μέρη/τους ήχους κοντά στο σχολείο, στη γειτονιά και στην πόλη; Με το συγκεντρωμένο υλικό, μπορείτε μετά να φτιάξετε ένα κουίζ ή ένα παιχνίδι προσανατολισμού, με τη συμμετοχή πιθανόν άλλων τάξεων και/ή των γονέων.

### Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

Οι μαθητές σχεδιάζουν χάρτες των ηχοπεριπάτων και τους συγκρίνουν.

Σχεδιάστε έναν χάρτη και χωρίστε τον σε συμπλέγματα ή τοποθεσίες που συνδέονται με μονοπάτια. Κατόπιν, οι μαθητές προσπαθούν να βρουν στον χάρτη ένα μονοπάτι που τους επιτρέπει να διασχίσουν κάθε τοποθεσία στον χώρο του σχολείου. Κατόπιν ηχογραφούν τον περίπατο σε αυτό το μονοπάτι.

Μετρήστε τις αποστάσεις από τις οποίες μπορούν να ακουστούν οι βρύσες, ο θόρυβος του δρόμου ή το κουδούνι του σχολείου, κάτω από διαφορετικές συνθήκες (καιρός, θόρυβοι, χρόνος).

Συγκεντρώστε και αναγνωρίστε τους ήχους ενός συγκεκριμένου ηχοπερίπατου για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα και ομαδοποιείστε τους σε σύνολα. Μερικοί από αυτούς θα είναι τελείως διαφορετικοί, ενώ άλλοι θα επικαλύπτονται, π.χ. οι πολυσύχναστοι αυτοκινητόδρομοι και τα φορτηγά είναι ανθρώπινες επινοήσεις, ενώ ένα ρυάκι είναι φυσικό. Τόσο ο θόρυβος του ρυακιού όσο και ο θόρυβος του αυτοκινητόδρομου θα είναι συνεχείς εάν δεν υπάρχει κίνηση.

Ηχογραφήστε τους ηχοπεριπάτους ενώ αλλάζετε το βήμα σας με σόλες παπουτσιών που κάνουν θόρυβο. Σταματήστε και μετά επιστρέψτε πίσω.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Λογισμικό 'soundOscope': <https://itunes.apple.com/ch/app/soundoscope/id494240165?mt=8>

Cslovjecsek, Markus (et al.): Mathe macht Musik, Impulse zum musikalischen Unterricht mit dem Zahlenbuch 3 und 4, Klett und Balmer Verlag, Zug, 2004, p. 23, p. 69.

Westerkamp, Hildegard (1974): Soundwalking. In: Sound Heritage III/4. [<http://www.sfu.ca/~westerka/writings%20page/articles%20pages/soundwalking.html>, 29.1.2015]

Dietze, Lena (2000). Soundscapes – Klanglandschaften, Soundwalks – Klangspaziergänge. In: L. Huber & E. Odersky (Hrsg): Zuhören-Lernen-Verstehen (S. 92-103). Braunschweig: Westermann, Reihe Praxis Pädagogik.

Schafer, R. Murray (2010). Die Ordnung der Klänge. Eine Kulturgeschichte des Hörens. Mainz: Schott.

Schafer, R. Murray (1977). The Tuning of the World. New York: Knopf.

Schafer, R. Murray (1994). Soundscape: Our Sonic Environment and the Tuning of the World. Rochester, VT: Destiny Books.

Παραδείγματα ηχοπεριπάτων στο YouTube

## 5.2 Πηδώντας στον ρυθμό: σχέσεις πολλαπλασιασμού και μέτρου

### Θέμα

Αυτή η δραστηριότητα χρησιμοποιεί την σωματοποίηση, το ηχόχρωμα και το μέτρο, για να ενθαρρύνει τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν το μοτίβο και τον ρυθμό για να κατανοήσουν καλύτερα τις σχέσεις πολλαπλασιασμού.

### Λέξεις-κλειδιά

Μέτρο, ρυθμός, σχέσεις πολλαπλασιασμού.

### Σύντομη περιγραφή

Μετρώντας δυνατά σε κύκλο, συνδυάζοντας και στοιχεία body percussion, τα παιδιά κατανοούν περισσότερο τις σχέσεις πολλαπλασιασμού. Τόσο το μουσικό μέτρο όσο και οι σχέσεις πολλαπλασιασμού τονίζονται σε αυτή τη δραστηριότητα.

### Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τους πυρήνες της μουσικής και των μαθηματικών

Μουσική: Παλμός, μέτρο και ρυθμός, πρακτική δημιουργία μουσικής.

Μαθηματικά: Οι μαθητές κάνουν μαθηματικούς συλλογισμούς και συνδέσεις· επικοινωνούν μαθηματικές ιδέες· αριθμητικές σχέσεις – πολλαπλασιασμός, αξιολόγηση.

## Προετοιμασία

### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά

Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, μοτίβα.

### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά

Σωματικός συντονισμός (χτυπήματα με τις παλάμες/τα πέλματα), παλμός.

### Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

Σχέσεις πολλαπλασιασμού και μουσικό μέτρο.

## Εφαρμογή της δραστηριότητας

### Στόχοι

Τα παιδιά κατανοούν βαθύτερα τις σχέσεις πολλαπλασιασμού και το μουσικό μέτρο εστιάζοντας στην ομάδα αναπαράγοντας τις μαθηματικές και μουσικές έννοιες με κινήσεις του σώματος.

### Ομάδα-στόχος (ηλικία μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες κτλ.)

Ηλικίες:: 7+ ετών, δραστηριότητα για όλη την τάξη

### Χρονοδιάγραμμα

20+ λεπτά

### Δραστηριότητα – Τυπική προσέγγιση

- Σταθείτε σε κύκλο με τα παιδιά. Εξηγήστε ότι κάθε παιδί θα λέει μόνο έναν αριθμό από το 1 έως το 4 με τη σειρά. Τώρα, ξεκινήστε με το παιδί που βρίσκεται στα αριστερά σας και προχωρήστε μετρώντας 1, 2, 3, 4. Συνεχίστε μέχρι που το κάθε παιδί να έχει πει έναν αριθμό (1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4 κτλ). Επαναλάβετε αυτή τη διαδικασία και κρατήστε ένα σταθερό ρυθμό.
- Μόλις το κατακτήσουν αυτό τα παιδιά, θα προσθέσετε σωματική επίκρουση. Ζητήστε από τα παιδιά που έχουν τον αριθμό 1 να χτυπήσουν παλαμάκια μόλις ακούσουν τον αριθμό τους, και ζητήστε από τα παιδιά που έχουν τον αριθμό 4 να χτυπήσουν τα πόδια τους. Καθώς κάνετε τον γύρο της τάξης, καταλήγετε στον αριθμό 4; Μπορούν τα παιδιά να εξηγήσουν γιατί συμβαίνει αυτό;
- Κατά πάσα πιθανότητα, ο γύρος της τάξης δεν θα τελειώνει στο 4. Αν συμβαίνει αυτό, ζητήστε από τα παιδιά να προβλέψουν πόσες φορές θα χρειαστεί να κάνουν τον γύρο για να τελειώσουν σε 4; Δοκιμάστε το και δείτε τι συμβαίνει.
- Τώρα, δοκιμάστε τη δραστηριότητα με διαφορετικούς αριθμούς (π.χ. 1, 2, 3, 4, 5 ή 1, 2, 3). Είναι σημαντικό να ενθαρρύνετε τα παιδιά να προβλέψουν τι θα συμβεί και γιατί, πριν το δοκιμάσετε στην πράξη. Πρόβλεψαν σωστά;
- Τι παρατηρούν τα παιδιά σε σχέση με τα διαφορετικά μέτρα; Υπάρχουν κάποια μέτρα που προτιμούν; Γιατί συμβαίνει αυτό;

### Υλικά, εικόνες μουσική – Χωρική διάταξη

Πηγές: Δεν χρήζει η ανάγκη πηγών.

Οδηγία: Αυτή η δραστηριότητα θα πρέπει να γίνει σε ένα δωμάτιο όπου τα παιδιά θα έχουν χώρο να σταθούν σε κύκλο και μετά να δουλέψουν σε ζευγάρια.

### Παραλλαγές

#### Παραλλαγές

- Μπορείτε να ζητήσετε από τα παιδιά να προσθέσουν και άλλα στοιχεία σωματικής επίκρουσης (π.χ. να χτυπάνε το στήθος τους ή τα δάχτυλά τους) πάνω στους αριθμούς που βρίσκονται ανάμεσα στον πρώτο και στον τελευταίο αριθμό.
- Η τάξη μπορεί να μοιραστεί σε δύο ή περισσότερες ομάδες και έτσι να επαναληφθεί η δραστηριότητα με κάθε ομάδα. Τι παρατηρούν αυτή τη φορά; Ήταν ευκολότερο ή δυσκολότερο;
- Με βάση την πρώτη δραστηριότητα, τα παιδιά 2 και 3 παραμένουν σιωπηλά, αλλά η ομάδα και πάλι πρέπει να κρατάει τον χρόνο, έτσι ώστε οι μόνοι ήχοι να είναι αυτοί για τους χτύπους 1 και 4.

#### Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική

- Τα παιδιά μπορούν να δημιουργήσουν τα δικά τους στοιχεία σωματικής επίκρουσης.
- Τα παιδιά μπορούν να χρησιμοποιήσουν όργανα αντί για αριθμούς και σωματική επίκρουση.
- Για μεγαλύτερη πρόκληση, τα παιδιά μπορούν να συμπεριλάβουν παύσεις στις εκτελέσεις τους.

### Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

- Δραστηριότητες βασισμένες στα πολλαπλάσια, στους διαιρέτες, στο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και στον μέγιστο κοινό διαιρέτη.
  - Δραστηριότητες που περιλαμβάνουν μοτίβα και ακολουθίες.
  - Ανάπτυξη ιδεών με μεταθέσεις και συνδυασμούς.
-

### 5.3 Χτυπώντας παλαμάκια στο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5

#### Θέμα



Η δραστηριότητα «Χτυπώντας παλαμάκια στο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5» έχει να κάνει με τη χρήση ηχηρών κινήσεων και διαφορετικών σωματικών ηχοχρωμάτων και τη σύνδεση, προκειμένου να απαντηθεί η εξής ερώτηση: Ποιο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5;

#### Λέξεις-κλειδιά

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, ηχηρές κινήσεις, σωματικό ηχόχρωμα.

#### Σύντομη περιγραφή

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές θα μάθουν τρία ρυθμικά μοτίβα σωματικών κρουστών, με κάθε ένα να σχετίζεται με τους αριθμούς 2, 3 και 5. Μετά, θα παίξουν κάθε μοτίβο συγχρόνως, μετρώντας από το 1 μέχρι το 30, για να βρουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5. Ακούγοντας τα διαφορετικά σωματικά ηχοχρώματα, οι μαθητές θα μπορέσουν να ανακαλύψουν όχι μόνο το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, αλλά και άλλα πολλαπλάσια και τις σχέσεις μεταξύ αυτών των αριθμών.

#### Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τον πυρήνα της μουσικής και των μαθηματικών

Μουσική: Εκτέλεση σωματικών κρουστών· ικανότητα να ακούνε διάφορα σωματικά ηχοχρώματα· αναγνώριση ηχοχρωμάτων· ικανότητα να ακολουθούν τον ρυθμό· ρυθμική ανάγνωση· ρυθμική μίμηση· κανονική και ρυθμική ακρίβεια· και ικανότητα να εκτελούν και να ακούνε διαφορετικά ηχητικά μοτίβα συγχρόνως.

Μαθηματικά: Χρησιμοποιούν τον συλλογισμό και την απόδειξη για να βρουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο· σειρά· σχέσεις· πολλαπλάσια (και διαιρέτες)· και συνδέσεις

#### Προετοιμασία

##### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά



Απαιτούνται βασικές δεξιότητες μέτρησης και αρίθμησης. Δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο· μπορείτε να τους το διδάξετε μέσα από τη δραστηριότητα

##### Προαπαιτούμενα στη μουσική

Απαιτούνται βασικές δεξιότητες στα μοτίβα ρυθμού (ανάγνωση και μίμηση). Δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουν σωματική επίκρουση· μπορείτε να τους τη διδάξετε μέσα από τη δραστηριότητα

##### Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

Η εκτέλεση ενός μοτίβου κανονικού ρυθμού μετρώντας αριθμούς (1–30), καθώς ακολουθούν ένα ρυθμικό μοτίβο, σχετίζεται με τη μαθηματική ακρίβεια, σχέση, αρίθμηση, σειρά και τον χρόνο.

Ο χωρισμός της τάξης σε τρεις σειρές, με κάθε μία να παίζει διαφορετικά ρυθμικά μοτίβα, και η ακρόαση διαφορετικών σωματικών ηχοχρωμάτων, σχετίζεται επίσης



με τον συγχρονισμό και τη συσχέτιση μεταξύ αριθμών (πολλαπλάσια και διαιρέτες).

Σε αυτή τη δραστηριότητα, τα παιδιά θα προσπαθήσουν να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ακούγοντας το ίδιο ηχόχρωμα, άρα είναι απαραίτητο να ακολουθούν το ίδιο ρυθμικό μοτίβο και να έχουν ρυθμική ακρίβεια.

Ο συγχρονισμός ήχων συνδέεται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο κάποιων αριθμών.

## Εφαρμογή της δραστηριότητας

### Στόχοι



Να βελτιώσουν τις δεξιότητες εκτέλεσης και ρυθμού· να ακούνε και να αναγνωρίζουν το ίδιο ηχόχρωμα, προκειμένου να βρουν τη λύση ενός προβλήματος ή ερωτήματος· να βρουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και άλλων πολλαπλάσιων κάποιων αριθμών· να ακολουθούν το ρυθμικό μοτίβο και τον ρυθμό με ακρίβεια· και να εκτελούν ρυθμικά μοτίβα χρησιμοποιώντας σωματικά κρουστά

### Ομάδα-στόχος (ηλικία μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες κτλ.)

Ηλικίες: 8–11 ετών (+), μέχρι 30 μαθητές (με τους μαθητές με ειδικές ανάγκες χρησιμοποιείτε μίμηση ρυθμού αντί για ανάγνωση)

### Χρονοδιάγραμμα

Δύο συναντήσεις για να κατανοήσουν ολόκληρη τη δραστηριότητα. 30 λεπτά για να βρουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο αριθμών ( $2/3 \cdot 2/5 \cdot 3/5$ ) αντί για τρεις (2, 3, 5)

### Δραστηριότητα – Τυπικά προσέγγιση

- Ξεκινήστε με τη σωματική επίκρουση του αριθμού 2. Ο εκπαιδευτικός δείχνει στα παιδιά ένα μοτίβο σωματικής επίκρουσης τριάντα εννέα ρυθμικών μοτίβων (Βλ.τα υλικά) και εξηγεί τη σημασία κάθε συμβόλου.  
Εάν το επίπεδο των μαθητών το επιτρέπει, θα μπορούν να μάθουν το μοτίβο της σωματικής επίκρουσης διαβάζοντάς το. Φροντίστε να ακολουθείτε το ρυθμικό μοτίβο μετρώντας τους αριθμούς (από το 1 έως το 30). Τα πολλαπλάσια του 2 (2, 4, 6, 8, μέχρι το 30) θα πρέπει να συμπίπτουν με το χτύπημα των χεριών. Εάν οι μαθητές δεν μπορούν να διαβάσουν την παριτιούρα, ο δάσκαλος μπορεί να τη διδάξει μέσω μίμησης, για να θυμούνται καλύτερα τον ρυθμό. Μόλις οι μαθητές μάθουν τη σωματική επίκρουση, θα πρέπει να την εκτελέσουν καθώς μετράνε μέχρι το 30 (ακολουθώντας το ρυθμικό μοτίβο).
- Ακολουθήστε την ίδια διαδικασία με τη σωματική επίκρουση του αριθμού 3 (Βλ.τα υλικά). Παρατηρήστε ότι τώρα τα παλαμάκια βασίζονται στα πολλαπλάσια του αριθμού 3 (3, 6, 9, μέχρι το 30).
- Ο εκπαιδευτικός χωρίζει την τάξη σε δύο σειρές (αντιριστα). Η μία σειρά εκτελεί τη σωματική επίκρουση του αριθμού 2 και η άλλη εκτελεί τη σωματική επίκρουση του αριθμού 3. Κάθε φορά που θα υπάρχει ένα πολλαπλάσιο του 2 και του 3, οι μαθητές θα χτυπάνε παλαμάκια συγχρόνως. Την πρώτη φορά που θα συμβεί αυτό, βρίσκουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2 και 3. (στο τέλος, μπορούμε να απαριθμήσουμε να κοινά πολλαπλάσια που βρήκαμε ακούγοντας το ίδιο ηχόχρωμα (παλαμάκια).
- Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δείξει τη σωματική επίκρουση του αριθμού 5 (Βλ.τα υλικά) και οι μαθητές να προσπαθήσουν να βρουν, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία,

το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5. Παρατηρήστε ότι κατά τη σωματική επίκρουση του αριθμού 5, τα πολλαπλάσια συμπίπτουν επίσης με τα παλαμάκια. Οι μαθητές, αντικριστά στις σειρές τους, μπορούν να ακολουθήσουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 2 και του 5 (10) ή του 3 και του 5 (15).

5. Τέλος, ο εκπαιδευτικός οργανώνει τους μαθητές σε τρεις σειρές, δύο παράλληλες και μία κάθετη, και κάθε σειρά εκτελεί τη σωματική επίκρουση ενός αριθμού (2, 3 και 5). Όταν όλοι οι μαθητές χτυπάνε παλαμάκια συγχρόνως, θα έχουν βρει το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3 και 5 (30). Είναι απαραίτητο να μετρήσουν μέχρι το 30, ακολουθώντας το ρυθμικό μοτίβο, για να μάθουν σε ποιον αριθμό συμπίπτουν οι τρεις σειρές.
6. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προβάλει την εικόνα των τριών ρυθμικών μοτίβων να επικαλύπτονται (δες τα υλικά), για να δείξει ποιοι αριθμοί συμπίπτουν με τα παλαμάκια (επομένως και με τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών 2, 3 και 5).

### Υλικά, εικόνες, μουσική – Χωρική διάταξη

## Clapping the Lowest Common Multiples of 2,3,5

### Additional Materials

The musical notation consists of three staves, each representing a different rhythm. The first staff is for a 2-measure rhythm, the second for a 3-measure rhythm, and the third for a 5-measure rhythm. The notation is spread across 30 measures, with the first 15 measures on the top three staves and the next 15 measures on the bottom three staves. Each measure is numbered from 1 to 30. The notation uses various rhythmic symbols: a vertical line with a flag for a half-measure, a vertical line with a cross for a quarter-measure, and a vertical line with a cross and a flag for an eighth-measure. The 5-measure rhythm is more complex, involving eighth and sixteenth notes.

### Symbols

The legend shows four symbols on a staff with their corresponding actions: a vertical line with a flag for 'Slap chest', a vertical line with a cross for 'Clap your hands', a vertical line with a cross and a flag for 'Slap tights', and a vertical line with a cross and a flag for 'Stomp your feet'.

**Χτυπώντας παλαμάκια το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 3, 5  
(Clapping the Lowest Common Multiples of 2,3,5)**

**Επιπλέον υλικά  
(Additional materials)**

**Σύμβολα (Symbols)**

Χτύπα το στήθος (Slap chest) / Χτύπα τα χέρια (Clap your hands) / Χτύπα τους μηρούς (Slap thighs) / Χτύπα τα πόδια (Stomp your feet)

**Παραλλαγές**



**Παραλλαγή #1:** Αντί να χρησιμοποιήσετε σωματική επίκρουση, χρησιμοποιείστε τις νότες ντο (πόδια), μι (μηροί), σολ (χέρια) και ντο (στήθος). Σε αυτή την παραλλαγή εμφανίζεται η έννοια της συγχορδίας. Η διαδικασία είναι η ίδια. Ωστόσο, αντί να χρησιμοποιήσετε ρυθμικά μοτίβα σωματικής επίκρουσης, χρησιμοποιήστε εύκολα μελωδικά μοτίβα με τη νότα σολ στα πολλαπλάσια κάθε αριθμού.

Κάθε φορά που τραγουδιέται η νότα σολ, βρίσκεται ένα πολλαπλάσιο. Καθώς τραγουδούν, δεν θα μπορούν να λένε τους αριθμούς, γι' αυτό ο δάσκαλος μπορεί να τους γράφει στον πίνακα και να τους δείχνει καθώς ακολουθούν το ρυθμικό μοτίβο, ή ένας εθελοντής μπορεί να το κάνει αυτό ή να τους λέει δυνατά, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές τραγουδούν το μελωδικό μοτίβο ενός αριθμού (2, 3 ή 5).

**Παραλλαγή #2:** Χρησιμοποιώντας σωματική επίκρουση, οι μαθητές στέκονται σε κύκλο. Κάνουν ένα βήμα προς τα δεξιά. Κάθε φορά, ένας μαθητής εκτελεί το ρυθμικό μοτίβο ενός δεδομένου ρυθμικού μοτίβου ενώ λέει δυνατά τον αριθμό του αντίστοιχου ρυθμικού μοτίβου. Για παράδειγμα, εάν ακολουθούν το ρυθμικό μοτίβο του αριθμού 2, θα συνειδητοποιήσουν ότι οι μαθητές που είπαν τον αριθμό 2, 4, 6 ή 8 χτύπησαν τα χέρια τους. Άρα, αυτοί οι αριθμοί είναι τα πολλαπλάσια του αριθμού 2. Εάν επαναλάβουμε αυτή τη δραστηριότητα με τους αριθμούς 3 και 5 (ξεκινώντας με το ίδιο πρόσωπο κάθε φορά), θα μπορέσουμε να ανακαλύψουμε τα κοινά πολλαπλάσια αυτών των αριθμών.

**Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική**

Οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν ένα πιο πολύπλοκο ρυθμικό μοτίβο σωματικής επίκρουσης αλλάζοντας το ηχόχρωμα των πολλαπλασίων.

Οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν ένα μελωδικό μοτίβο για κάθε αριθμό και να το καταγράψουν. Αλλάζτε τη συγχορδία ή αλλάζτε τη νότα που αντιστοιχεί στα πολλαπλάσια.

Αλλάζτε τα μέρη του σώματος που χρησιμοποιούνται στη σωματική επίκρουση.

Χρησιμοποιείστε όργανα για να εκτελέσετε κάθε ρυθμό, έτσι ώστε να έχετε τόσα ηχοχρώματα όσα και αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στη σωματική επίκρουση.

### Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

Αλλάξτε τους αριθμούς και βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους και άλλα πολλαπλάσιά τους.

Εάν κάνετε την Παραλλαγή #2, προσπαθήστε να σχηματίσετε ένα τέλειο κύκλο και συζητήστε περί γεωμετρίας.

---

## 5.4 Αριθμοί που «ηχούν»

### Θέμα

Η δραστηριότητα αφορά στη δημιουργία διαφορετικών ακουστικών μοντέλων των φυσικών αριθμών.

### Λέξεις-κλειδιά

Μαθηματικά: Αριθμοί, ψηφία, ο θεσιακός συμβολισμός ενός αριθμού στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα (ανώτερος και συντομογραφημένος συμβολισμός), ανάλυση ενός αριθμού.

Μουσική: ρυθμός, μέτρο.

### Σύντομη περιγραφή

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές θα επινοήσουν διάφορους τύπους ακουστικών μοντέλων για τους φυσικούς αριθμούς, θα αναγνωρίσουν και θα καταγράψουν ν-ψήφιους φυσικούς αριθμούς με βάση τις ακουστικές τους αναπαραστάσεις.

### Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τον πυρήνα της μουσικής και των μαθηματικών

Μουσική: Στοιχεία μουσικής (παλμός, ρυθμός)· παίξιμο μουσικών οργάνων και τραγούδι· ρυθμική ηχώ (μίμηση).

Μαθηματικά: Αριθμοί (φυσικοί αριθμοί, θεσιακή αξία)· αριθμηση· ο θεσιακός συμβολισμός ενός αριθμού στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα.

## Προετοιμασία

### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά

Βασικές δεξιότητες αριθμησης – ανάγνωση και γραφή φυσικών αριθμών στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, γραφική αναπαράσταση ν-ψήφιων αριθμών

### Προαπαιτούμενα στη μουσική

Να γνωρίζουν και να κατανοούν την έννοια της ηχούς (σωματικό παιχνίδι, παιδικά ρυθμικά μουσικά όργανα)

### Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

Ακούνε διαφορετικά είδη ήχων για τις μονάδες (δεκάδες, εκατοντάδες κτλ.) και μετράνε για να συνδέσουν τις αφηρημένες έννοιες των δεκαδικών θεσιακών αριθμητικών συστημάτων με το ακουστικό μοντέλο του αριθμού.

Δημιουργούν και χρησιμοποιούν ήχους που μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση των βασικών κανόνων του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος.

Η δραστηριότητα περιλαμβάνει στοιχεία συνδυαστικής λογικής.

Η δραστηριότητα συνδέεται με το παίξιμο μουσικό οργάνων.

## Εφαρμογή της δραστηριότητας

### Στόχοι

Να κατανοήσουν οι μαθητές ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους φυσικούς αριθμούς με διάφορους τρόπους (σημειογραφία, γραφικές αναπαραστάσεις (σύμβολα), χειρισμό μικρών αντικειμένων, ακουστικά μοντέλα).

Να βελτιώσουν τις δεξιότητές τους στη μετατροπή ενός γραπτού μοντέλου αριθμών σε ακουστικό μοντέλο και το αντίστροφο.

### Ομάδα-στόχος (ηλικία μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες κτλ.)

Ηλικίες: 7–9 ετών (+); δύο ομάδες των τεσσάρων (+) μαθητών, ή δουλειά σε ζευγάρια

### Χρονοδιάγραμμα

20 λεπτά για την τυπική προσέγγιση

### Δραστηριότητα – Τυπική προσέγγιση

- Ο εκπαιδευτικός γράφει έναν τριψήφιο αριθμό στη δεκαδική σημειογραφία του και στη γραφική του αναπαράσταση (π.χ. 235, // --- +++++).
- Κατόπιν ο εκπαιδευτικός ηχεί τον αριθμό χρησιμοποιώντας χτυπώντας τα πέλματα (2χ), χτυπώντας το στήθος (3χ) και χτυπώντας παλαμάκια (5χ). Παίζει τον επόμενο αριθμό και οι μαθητές τον γράφουν χρησιμοποιώντας ψηφία ή σημεία (γραφική αναπαράσταση).
- Οι μαθητές από κάθε ομάδα επινοούν σύνολα ήχων για να κωδικοποιήσουν μια ακουστική αναπαράσταση των φυσικών αριθμών (π.χ. τέσσερις 3-ψήφιους αριθμούς). Μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς ήχους (παιχνίδι με το σώμα, όργανα Ορφ, κουτάλια κτλ. ).
- Οι μαθητές της πρώτης ομάδας παρουσιάζουν (παίζουν) τους αριθμούς χρησιμοποιώντας τον ακουστικό κώδικα που έχουν επινοήσει.
- Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας γράφουν τους ηχούμενους αριθμούς (ή σχεδιάζουν ένα γραφικό μοντέλο των αριθμών).
- Αξιολόγηση και συζήτηση: ποιοι αριθμοί παίχτηκαν (αναπαρασταθήκαν) και τι είδους κώδικες χρησιμοποιήθηκαν;
- Συζητήστε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα διαφόρων τύπων αναπαράστασης των φυσικών αριθμών (γραφική, ακουστική, δεκαδική). Συγκρίνετε τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των αριθμών.

### Υλικά, εικόνες, μουσική – Χωρική διάταξη

Χαρτί, στυλό, τραπέζι, όργανα Ορφ.

Οι μαθητές κάθονται στα θρανία τους και δουλεύουν σε δύο ομάδες ή σε ζευγάρια.

## Παραλλαγές

### Παραλλαγές



- Αυτή η δραστηριότητα μπορεί να εκτελεστεί και σε ζευγάρια (συνεργατική μάθηση).
- Μπορείτε να διαλέξετε οποιαδήποτε αντικείμενα ή μουσικά όργανα (ξυλάκια, τρίγωνα, τύμπανα, κύπελλα, τενεκεδάκια, μαράκες) για να αναπαραστήσετε τους ήχους.
- Τα σημεία των ήχων θα κάνουν τους μαθητές να παίξουν αριθμούς χρησιμοποιώντας το σημειωτικό μοντέλο των αριθμών, π.χ. 235 και // --- +++++.
- Αυτή η δραστηριότητα μπορεί επίσης να εκτελεστεί με ομάδα μεγαλύτερων μαθητών, ανάλογα με την επιλεγμένη σειρά αριθμών (π.χ. πάνω από 1.000, 10.000 κτλ.).
- Υπάρχει δυνατότητα να δημιουργήσετε διαφορετικές δραστηριότητες και παραλλαγές, ανάλογα με τις ικανότητες και δεξιότητες της ομάδας-στόχου. Από την άποψη της ομάδας-στόχου, μπορείτε να προσαρμόσετε με ευελιξία τις δραστηριότητες για οποιαδήποτε ηλικιακή ομάδα ή σειρά αριθμών.

### Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική

Επινοήστε διαφορετικούς ήχους για τα σημεία στα γραφικά μοντέλα των φυσικών αριθμών.

Επινοήστε μια σημειογραφία για να γράψετε τον αριθμό (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες).

Χρησιμοποιώντας όργανα Ορφ, φτιάξτε ένα ακουστικό μοντέλο των αριθμών για να δημιουργήσετε τον ρυθμό.

Οι αξίες των νοτών μπορούν να αντιπροσωπεύουν τη θεσιακή αξία των ψηφίων στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα (π.χ. νότα τετάρτου = ένα, νότα μισού = δέκα, ολόκληρη νότα = εκατό).

### Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

Με τη συχνή επανάληψη της δραστηριότητας, δημιουργείται ένα νέο άτυπο μοντέλο των φυσικών αριθμών, το οποίο διαφέρει από τα συγκεκριμένα (άβακας, κύβοι, αντικείμενα, γραφική αναπαράσταση) που χρησιμοποιούνται συνήθως. Κατά τη διαδικασία της υλοποίησης, πρέπει καθένας να αναπτύξει τη δική του νοητική αναπαράσταση ενός πολυψήφιου αριθμού. Κάποιοι ήχοι μετατρέπονται σε ένα σύμβολο ψηφίου, το οποίο μένει στη μνήμη και τελικά καταγράφεται με χρήση μαθηματικής ορολογίας. Η εφαρμογή των προαναφερθεισών δραστηριοτήτων αναπτύσσει τις ανώτερες γνωστικές λειτουργίες και περιλαμβάνει εκτελεστικές λειτουργίες, ειδικά τη μνήμη εργασίας και τη μετατόπιση.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Hejný, M. & Kuřina, F. 2001. Dítě, Skola, Matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál, 2001.
- Sonnensyn, G. Metodologie Grunnalget – Model pojmového vyučování (Concept Teaching Model).
- Cslovjecsek, M. & Linneweber-Lammerskitten, H. 2011. Snappings, Clappings and the Representation of Numbers. The New Jersey Mathematics Teacher. Vol. 69, Issue 1, pp. 10-12.

## 5.5 Οι χοροί της γωνίας

### Θέμα



Διαφορετικά είδη γωνίας εκφράζονται με διαφορετική τοποθέτηση των χεριών και των ποδιών σε μια χορογραφία.

### Λέξεις-κλειδιά

Γωνίες, σωματικές κινήσεις, μοτίβα.

### Σύντομη περιγραφή

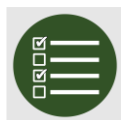
Μια χορογραφία δημιουργείται στο μαθησιακό περιβάλλον. Οι χοροί εκφράζουν διαφορετικά είδη γωνίας μέσα από διαφορετικές τοποθετήσεις των χεριών και των ποδιών. Η χορογραφία δημιουργείται με μικρές φιγούρες από χαρτόνι. Αργότερα, οι χορευτές θα εκτελέσουν τη χορογραφία τους με την κατάλληλη μουσική. Οι διαφορετικές θέσεις των χεριών και των ποδιών πρέπει να συνδέονται με συνεχή ροή. Ανάλογα με τις γνώσεις των συμμετεχόντων, μπορούν να διδαχτούν διαφορετικά είδη γωνίας με χρήση εικόνων στο μαθησιακό περιβάλλον.

### Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τον πυρήνα της μουσικής και των μαθηματικών

Μεταδίδετε μαθηματικές ιδέες χρησιμοποιώντας πολλαπλές αναπαραστάσεις: διαφορετικά είδη γωνίας: αναγνώριση μοτίβων· σύνδεση μουσικής με κινήσεις του σώματος· και σωματική ανταπόκριση στη μουσική

## Προετοιμασία

### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά



- Γνώσεις σχετικά με τα διαφορετικά είδη γωνίας: ορθή γωνία, οξεία γωνία, αμβλεία γωνία, ευθεία γωνία
- Πως ορίζεται μαθηματικά η γωνία.

Ο χορός της γωνίας επικεντρώνεται στα χέρια και στα πόδια. Αυτά τα μέρη του σώματος είναι ιδιαίτερα εύκαμπτα λόγω της δομής των αρθρώσεών τους. Υπάρχει πολύ μεγάλη ευλυγισία στα γόνατα και στους αγκώνες. Έτσι, το πάνω και το κάτω μέρος των χεριών και των ποδιών μπορούν να τοποθετηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανιστούν ανοίγματα γωνιών.

### Προαπαιτούμενα στη μουσική

Ο χορός αποτελεί το κέντρο αυτού του μαθησιακού περιβάλλοντος. Η έκφραση του χορού δημιουργείται μέσω της κίνησης του σώματος και των άκρων (χέρια και πόδια).

### Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

Η μουσική δημιουργεί μοτίβα ήχων, τα οποία αναπαριστούν διαφορετικές διαθέσεις, και θα μετατραπούν σε ένα γεωμετρικό σχήμα. Μια οξεία γωνία έχει διαφορετική οπτική δύναμη από μια αμβλεία. Αυτό μπορεί να φανεί με τον χορό της γωνίας.



## Εφαρμογή της δραστηριότητας

### Στόχοι



- Αναγνώριση ηχητικών μοτίβων στη μουσική -> διαθέσεις
- Μετατροπή των ηχητικών μοτίβων σε σωματικές κινήσεις (χορό)
- Μετάφραση των διαθέσεων (που προκάλεσε η μουσική) σε κινήσεις και επομένως σε γεωμετρικά σχήματα: σε γωνίες του κατάλληλου είδους

### Ομάδα-στόχος (ηλικία μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες κτλ.)

Μπορεί να γίνει με παιδιά, εφήβους και νέους ενήλικες. Πρέπει να επιλέγεται η κατάλληλη μουσική ανάλογα με την ηλικία των συμμετεχόντων.

### Χρονοδιάγραμμα

Περίπου τρεις ώρες μαζί με την εκτέλεση/ παράσταση.

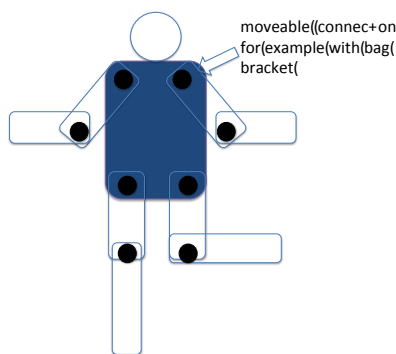
### Δραστηριότητα – Τυπική προσέγγιση

Στην αρχή της δραστηριότητας, πρέπει να οριστεί το είδος της κάθε γωνίας (ορθή γωνία, οξεία γωνία, αμβλεία γωνία, ευθεία γωνία κτλ.). Τα παιδιά που δεν γνωρίζουν τις γωνίες μπορούν να βοηθηθούν μέσα από εικόνες (τυπωμένα σχήματα ή εικόνες σε χαρτόνι). Μόλις αποσαφηνιστεί αυτό το θέμα, θα πρέπει να εξετάσετε πώς να δημιουργήσετε τα διάφορα είδη γωνιών με κινήσεις των χεριών και των ποδιών. Αυτό μπορείτε να το δείτε με φιγούρες από χαρτόνι. Κάποια είδη γωνιών προσφέρουν διαφορετικές δυνατότητες. Η έκφραση μέσω χορού μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλα τεντώματα όταν οι κινήσεις των χεριών και του σώματος παίρνουν μια ειδική μορφή. Συγχρόνως, θα πρέπει να εξετάσετε μήπως μπορείτε να αντιγράψετε τις κινήσεις των χεριών και του σώματος με τα δικά σας χέρια και πόδια.

Αφού ξεκαθαρίσετε τις διάφορες πιθανές θέσεις, θα πρέπει να δημιουργηθεί η χορογραφία. Για να γίνει η χορογραφία, θα πρέπει οι συμμετέχοντες να ακούσουν την επιλεγμένη μουσική και να σκεφτούν μαζί με τον εκπαιδευτικό ποιες ακολουθίες γωνιών ταιριάζουν στη μουσική.

### Υλικά, εικόνες, μουσική – Χωρική διάταξη

Προτείνεται να σχεδιάσετε τη χορογραφία σε ένα τραπέζι. Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσετε φιγούρες από χαρτόνι και διπλόιαρφα. Οι φιγούρες αυτές θα έχουν κινούμενα γόνατα και αγκώνες (Βλ. την εικόνα). Με τις φιγούρες, μπορείτε να εξετάσετε τις διάφορες ενδεχόμενες θέσεις. Η τελική χορογραφία μπορεί να αποτυπωθεί σε σχέδια.



## Παραλλαγές

### Παραλλαγές



Δείτε διάφορες γεωμετρικές φιγούρες χορεύοντας. Οι γεωμετρικές φιγούρες μπορούν να παρουσιαστούν από πολλά άτομα. Με αυτό τον τρόπο, οι κορυφές των γωνιών μπορούν να αναπαρασταθούν από ξεχωριστά άτομα και οι πλευρές από την ένωση των χεριών αυτών των ατόμων.

### Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική

Η μουσική μας εμπνέει ώστε να εκφραστούμε χορευτικά με διάφορες γεωμετρικές φιγούρες. Για παράδειγμα, γρήγορη ή σε υψηλό τόνο μουσική μπορεί να εκφραστεί με τρίγωνα. Πιο αργή ή πιο αρμονική μουσική μπορεί να εκφραστεί με κύκλους ή κανονικά πολύγωνα που κινούνται στον χώρο. Ανάλογα με τη μουσική, προκύπτουν διαφορετικοί χοροί.

### Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

Ένα βασικό στοιχείο για την ενσωμάτωση γεωμετρικών μορφών στον χορό (ανοίγματα γωνιών, επίπεδα σχήματα) είναι η ανάλυση των στοιχείων αυτών. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να προσδιορίσουμε τον αριθμό και τη θέση των πλευρών και των κορυφών των γωνιών που επεξεργαζόμαστε χορευτικά. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές μπορούν να μάθουν τα βασικά στοιχεία με παιγνιώδη τρόπο μετατρέποντάς τα σε διάφορους χορούς. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο μπορεί να σχηματιστεί από τέσσερις ανθρώπους που αντιπροσωπεύουν τις κορυφές, και, ανάλογα με τις θέσεις των χεριών τους, μπορούν να δημιουργηθούν ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή παραλληλόγραμμα με διαφορετικές γωνίες.

## 5.6 Φεγγαράκι μου λαμπρό

---

### Θέμα

Αξιοποίηση του τραγουδιού για να διερευνηθεί η συμμετρία, το μοτίβο, ο χρόνος, το θέμα και η τεχνική του καθρέπτη (αντανάκλαση).

### Λέξεις-κλειδιά

Ρυθμός, αντανάκλαση, μοτίβο, μετατροπή, θέμα και συμμετρία.

### Σύντομη περιγραφή

Τα παιδιά θα διερευνήσουν τι συμβαίνει όταν μετασχηματίζουν τη μουσική. Θα ανακαλύψουν επίσης ότι υπάρχουν διάφορα μοτίβα, ανάλογα με το αν θα επικεντρωθούν στον ρυθμό ή στις μουσικές νότες. Αυτό θα τους βοηθήσει να καταλάβουν ότι εάν μπορούσαμε να εστιάσουμε στις διαφορετικές όψεις ενός προβλήματος, θα υπάρχουν διαφορετικές λύσεις.

### Σχέση με τα συνδυαζόμενα μαθήματα / τον πυρήνα της μουσικής και των μαθηματικών

Παλμός και ρυθμικό μοτίβο· πρακτική δημιουργία μουσικής· σύνθεση και αυτοσχεδιασμός με τη χρήση της φωνής· αξιολόγηση της μουσικής· ακουστική επίγνωση μέσω ακρόασης και εκτέλεσης.

## Προετοιμασία

### Προαπαιτούμενα στα μαθηματικά

Μοτίβα και ακολουθίες, αντανάκλαση.

### Προαπαιτούμενα στη μουσική

Σωματικός συντονισμός (χτυπήματα χεριών/ποδιών), παλμός, χρήση φωνής για τραγούδι, ακρόαση.

### Σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής (μαζί με το επιπλέον όφελος της μάθησης)

Μοτίβα, ακολουθίες και μετατροπές.

---

## Εφαρμογή της δραστηριότητας

### Στόχοι

Τα παιδιά θα μάθουν για συμμετρίες, μοτίβα και θέματα στη μουσική και στα μαθηματικά.

### Ομάδα-στόχος (ηλικιά μαθητών, μέγεθος ομάδας, μαθητές με ειδικές ανάγκες κτλ.)

Ηλικίες: 8+ ετών.

Συμμετέχει όλη η τάξη, καθώς εργαζόμαστε σε ομάδες αλλά και σε ζευγάρια.

### Χρονοδιάγραμμα

20+ λεπτά

### Δραστηριότητα – Τυπική προσέγγιση

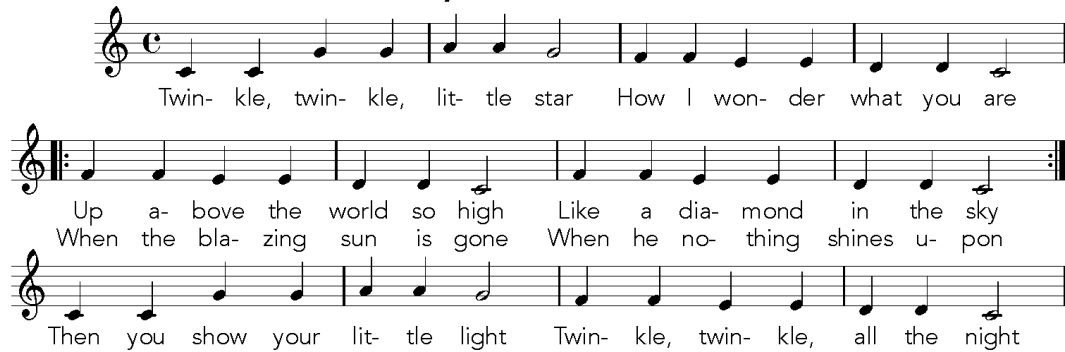
- Τραγουδήστε το τραγούδι αρκετές φορές με όλη την τάξη ώστε να βεβαιωθείτε ότι τα παιδιά το έμαθαν. Ρωτήστε τα παιδιά εάν παρατηρούν κάποια μοτίβα ή συμμετρίες στον σκοπό (ρυθμικά μοτίβα, μελωδικά μοτίβα, μορφή Α-Β-Α).
- Σχεδιάστε τη μελωδία με γραμμές, εστιάζοντας στα ψηλά και στα χαμηλά σημεία της.
- Κατόπιν μαζί με τα παιδιά, χτυπήστε παλαμάκια τον ρυθμό και ρωτήστε τι είδους μοτίβα παρατηρούν κάθε φορά. Είναι ίδια ή διαφορετικά από εκείνα που είχαν παρατηρήσει πριν;
- Στη συνέχεια, ζητήστε από τα παιδιά να δουλέψουν σε ζευγάρια ή μικρές ομάδες. Τα παιδιά πρέπει να επιλέξουν ένα θέμα από το τραγούδι, χρησιμοποιώντας είτε το τραγούδι, είτε τον σκοπό, είτε τον ρυθμό. Ζητήστε από τα παιδιά να δημιουργήσουν τη δική τους σημειογραφία για να αναπαραστήσουν το θέμα. Κατόπιν, τα παιδιά θα πρέπει να διερευνήσουν τι συμβαίνει όταν αποδίδουν σωματικά το θέμα με κινήσεις και να σχεδιάσουν αυτή την αυθόρμητη χορογραφία τους. Τα παιδιά μπορεί να θελήσουν να χρησιμοποιήσουν καθρέφτες για να ελέγξουν ότι έχουν σχεδιάσει σωστά τις χορογραφίες τους (ίσως θα ήταν καλύτερο η δραστηριότητα να πραγματοποιηθεί σε μια αίθουσα χορού). Μόλις γίνει αυτό, τα παιδιά θα εξασκηθούν στο να τραγουδούν ή να χτυπάνε παλαμάκια το θέμα που έχουν επιλέξει. Μπορεί να είναι ευκολότερο να προσπαθήσουν τα παιδιά να τραγουδήσουν τη μελωδία χωρίς τα λόγια.

### Υλικά, εικόνες, μουσική – Χωρική διάταξη

Πηγές: Καθρέφτες, φωτοαντίγραφα του τραγουδιού.

Παρατήρηση: Αυτή η δραστηριότητα μπορεί να γίνει σε μια αίθουσα όπου τα παιδιά έχουν χώρο να σταθούν σε κύκλο. Αν υπάρχει πίνακας, τα παιδιά μπορεί να μη χρειαστούν αντίγραφα του τραγουδιού.

### Twinkle, Twinkle Little Star



Twin- kle, twin- kle, lit- tle star How I won- der what you are  
Up a- bove the world so high Like a dia- mond in the sky  
When the bla- zing sun is gone When he no- thing shines u- pon  
Then you show your lit- tle light Twin- kle, twin- kle, all the night

### Παραλλαγές

#### Παραλλαγές

Υπάρχουν πολλά τραγούδια που θα μπορούσατε να διαλέξετε για να ξεκινήσετε, αλλά είναι σημαντικό να είναι τραγούδια γνωστά στα παιδιά και να έχουν απλή δομή (επιλέξτε ανάλογα με τη δική σας παράδοση και εθνική κουλτούρα).

#### Άλλες προσεγγίσεις στη μουσική

Χρησιμοποιήστε διαφορετικές εκδοχές του τραγουδιού, όπως στα παρακάτω τραγούδια:

- *A, B, C* (τραγούδι)
- *Baa, Baa Black Sheep*
- *A vous dirais je maman* (πρώτη εκτέλεση)
- Παραλλαγές του τραγουδιού, οι οποίες υπάρχουν σε ευρεία κυκλοφορία, από τον V.A.Mozart
- *What a Wonderful World* του Louis Armstrong (εμπνευσμένο από τη μελωδία).
- Διαλέξτε ένα θέμα και παρουσιάστε μια καινούρια εκδοχή του τραγουδιού.

Για παράδειγμα:

Σήμερα πήγα στο σχολειό  
μ' ένα φίλο μου παλιό.  
Του έδειξα την τάξη μου  
και τα φιλαράκια μου.  
Πήγαμε όλοι μαζί  
για παιχνίδι στην αυλή.  
Σήμερα πήγα στο σχολειό  
μ' ένα φίλο μου παλιό.

- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μουσικά όργανα για να ενορχηστρώσουμε απλά και ευχάριστα το τραγούδι με τα παιδιά.

### Άλλες προσεγγίσεις στα μαθηματικά

- Μπορούμε να κάνουμε τα ίδια πράγματα με ρυθμούς και παρτιτούρες όπως μπορούμε να κάνουμε με τα λόγια;
- Η ιδέα χρήσης ενός θέματος και ο μετασχηματισμός του θα μπορούσε να διερευνηθεί χρησιμοποιώντας χαρτί ταπετσαρίας ή περιτυλίγματος. Θα μπορούσαν να διερευνηθούν πιο παραδοσιακά σχέδια όπως αυτά στην Ισλαμική τέχνη.
- Αυτή η δραστηριότητα μπορεί επίσης να οδηγήσει σε δουλειά πάνω σε συνδυασμούς και μεταθέσεις και αυτό μπορεί να υποστηρίξει τη δουλειά με τα κλάσματα.
- Οι ιδέες μπορούν να επεκταθούν για να συμπεριλάβουν δουλειά με ακολουθίες.

## 6 Συμπεράσματα

Με αυτό το εγχειρίδιο, τονίζουμε τη σημασία της μουσικής και των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και δίνουμε έμφαση στην αντίστοιχη σημασία και των δύο κλάδων σε μαθησιακά περιβάλλοντα. Η μουσική και τα μαθηματικά λειτουργούν ως ισάξιοι συνεργάτες στη σύγχρονη διαθεματική διδακτική προσέγγιση. Πιστεύουμε ότι, με τη βοήθεια των δραστηριοτήτων που παρουσιάστηκαν σε αυτό το εγχειρίδιο και στον ιστότοπο του προγράμματος, οι εκπαιδευτικοί θα μπορέσουν να δουλέψουν με τους μαθητές τους και να αναπτύξουν νέες ιδέες, όχι μόνο σχετικές με τα μαθηματικά και τη μουσική, αλλά και σχετικά με άλλους πιθανούς συνδυασμούς, όπως δείξαμε και στο πρόγραμμα για τις γλώσσες.

Το σημαντικό συμπέρασμα που αναδύεται από τον διδακτικό συνδυασμό μαθηματικής και μουσικής μάθησης είναι ότι όλο και περισσότερες ιδέες εμφανίζονται, όταν εστιάζουμε στις κοινές απόψεις των δύο συστημάτων σημείων και στην ανθρώπινη νοημοσύνη (σύμφωνα με τον Gardner, 1983). Εν συντομία, υπάρχουν ηχηροί δρόμοι για τα μαθηματικά, όπως υπάρχουν και μαθηματικοί δρόμοι για τους ήχους.

Τέλος, θέλουμε να σας παροτρύνουμε όλους να πάρετε μέρος στο πρόγραμμα συμμετέχοντας σε ένα σεμινάριο Επαγγελματικής Ανάπτυξης (Course Professional Development, CPD), σε συνεργασία με τους συναδέλφους σας μέσω της δικτυακής μας πλατφόρμας (<http://maths.emportfolio.eu>) και να μοιραστείτε τις δικές σας δραστηριότητες.

## 7 Βιβλιογραφία

- Achermann, E. (2003). Zahl und Ohr: Musiktheorie und musikalisches Urteil bei Johann Beer [Number and ear: Music theory and musical judgment in the case of Johann Beer]. In F. van Ingen, H.-G. Roloff, & U. Wels (Eds.), *Jahrbuch für internationale Germanistik. Reihe A, Kongressberichte: Bd. 70. Johann Beer. Schriftsteller, Komponist und Hofbeamter, 1655-1700* (pp. 255–275). Bern, New York: P. Lang.
- Alexander, C., Ishikawa, S., Silverstein, M., Jacobson, M., Fiksdahl-King, I., & Angel S. (1977). *A Pattern Language. Towns, Buildings, Construction*. New York: Oxford University Press.
- Arzarello, F. (2015). *Semiosis as a multimodal process*, <http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/arzarello%20releme.pdf>.
- Auhagen, W. (2008). Rhythmus und Timing. In H. Bruhn (Ed.), *Rororo: 55661 : Rowohlt's Enzyklopädie. Musikpsychologie. Das neue Handbuch* (pp. 437–457). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
- Bamberger, J. (2010). Music, Math and Science: Towards an integrated curriculum. *Journal for Learning through Music*. Retrieved from <http://music-in-education.org/articles/1-G.pdf>
- Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2007). *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Bateson, G. (2002). *Mind and nature: A necessary unity. Advances in systems theory, complexity, and the human sciences*. Cresskill, N.J.: Hampton Press.
- Bharucha, J. J., & Mencl, W. Einar. (1996). Two Issues in Auditory Cognition: Self-Organization of Octave Categories and Pitch-Invariant Pattern Recognition. *Psychological Science*, 7(3), 142–149. doi:10.1111/j.1467-9280.1996.tb00347.x
- Bodrova, E. & Leong, D.J. (2001). Tools of the Mind: A Case Study of Implementing the Vygotskian Approach in American Early Childhood and Primary Classrooms. Genf: International Bureau of Education. Retrieved from <http://www.ibe.unesco.org/publications/inno07.pdf>
- Brandt, B., & Höck, G. (2011). Ko-Konstruktion in mathematischen Problemlöseprozessen – partizipationstheoretische Überlegungen. In B. Brandt, R. Vogel, & G. Krummheuer (Eds.), *Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education“ (IDeA)* (pp. 245–284). Münster: Waxmann.
- Brüning, S. (2003). *Musik verstehen durch Mathematik. Überlegungen zu Theorie und Praxis eines fächerübergreifenden Ansatzes in der Musikpädagogik*. Verl. Die Blaue Eule, Essen.
- Buchborn, T. (2004).  $2+1+3+8=B+A+C+H?$  Zahlen im Werk Johann Sebastian Bachs. *Musik & Bildung*, 36(95)(1), 36–41.
- Christmann, N. (2011). Mathematik gestaltet (mit) Musik [Mathematics designs (with) music]. *Der Mathematikunterricht*, 57(1), 13–23.
- Costa-Giomi, E. (2004). Effects of Three Years of Piano Instruction on Children's Academic Achievement, School Performance and Self-Esteem. *Psychology of Music*, 32, 139-152.
- Cslovjecsek, M., & Linneweber-Lammerskitten, H. (2011). Snappings, clappings and the representation of numbers. *The New Jersey Mathematics Teacher*, 69(1).
- Decroupet, P. (1995). Rätsel der Zahlenquadrate: Funktion und Permutation in der seriellen Musik von Boulez und Stockhausen. *Positionen: Beiträge zur Neuen Musik*, (23), 25–29. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=rih&AN=1996-12042&site=ehost-live>
- Devlin, K. (2003). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Owl Books.
- Dewey, J. (1925). *Experience and nature. Later Works, 1935-1953, Vol. 1*. Carbondale: Southern Illinois University Press.
- Dewey, J. (1980/1934). *Art as Experience*. New York: Perigee Books. New York: Perigee Books.
- Egeler-Wittmann, S. (2004). Magische Zahlen - historische Geheimnisse? Guillaume Dufays "Mon chier amy". *Musik & Bildung*, 36(95)(1), 30–35.

- Elliott, D. J. (1987). Structure and Feeling in Jazz: Rethinking Philosophical Foundations. *Bulletin of the Council for Research in Music Education*, (95), 13–38. doi:10.2307/40318198
- Elliott, D. J., & Silverman, M. (2014). *Music matters: A philosophy of music education* (Second edition).
- Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. Advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer.
- Fine, P., Berry, A., & Rosner, B. (2006). The effect of pattern recognition and tonal predictability on sight-singing ability. *Psychology of Music*, 34(4), 431–447. doi:10.1177/0305735606067152
- Fischinger, T., & Kopiez, R. (2008). Wirkungsphänomene des Rhythmus. In H. Bruhn (Ed.), *Rororo: 55661 : Rowohlt's Enzyklopädie. Musikpsychologie. Das neue Handbuch* (pp. 458–475). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
- Gembris, H. (1998). *Grundlagen musikalischer Begabung und Entwicklung. Forum Musikpädagogik: Bd. 20*. Augsburg: Wissner.
- Gerstenmaier, J., & Mandl, H. (1995). Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. *Zeitschrift für Pädagogik*, 41(6), 867–888.
- Girmes, R. (2003). Die Welt als Aufgabe ?! Wie Aufgaben Schüler erreichen. In H. Ball (Ed.), *Friedrich-Jahresheft: Vol. 21. Aufgaben. Lernen fördern - Selbstständigkeit entwickeln* (pp. 6–11). Seelze: Friedrich.
- Greeno, J. G. (1989). A perspective on thinking. *American Psychologist*, 44(2), 134–141.
- Gruhn, W. (2005). *Der Musikverstand: Neurobiologische Grundlagen des musikalischen Denkens, Hörens und Lernens* (2., neu überarb. Aufl.). Olms Forum: Vol. 2. Hildesheim: Olms, G.
- Gullberg, J. (1997). *Mathematics: From the birth of numbers* (1st ed.). New York: W.W. Norton.
- Henning, H. (2009). Würfel, Sphären, Proportionen - Mathematik, die man "hören" kann [Cubes, spheres, proportions - mathematics to be "heard"]. *Der Mathematikunterricht*, 55(2), 28–30.
- Hilton, C., Saunders, J., Henley, J., & Henriksson, L. (2015). *European Music Portfolio (EMP) – Maths : Sounding Ways Into Mathematics. A Review of Literature*. Retrieved from [http://maths.emportfolio.eu/images/deliverables/Literature\\_Review\\_EMP\\_M.pdf](http://maths.emportfolio.eu/images/deliverables/Literature_Review_EMP_M.pdf)
- Hindemith, P. (1940). *Unterweisung im Tonsatz; Band 1*: Mainz: Schott.
- Hirt, U., & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht: Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Hülswitt, K. L. (2003). Material als Denkwerkzeug. *Theorie und Praxis der Sozialpädagogik*, (10), 24–27.
- Hümmer, A., Münz, M., Müller Kirchof, M., Krummheuer, G., Leuzinger-Bohleber, M., & Vogel, R. (2011). Erste Analysen zum Zusammenhang von mathematischer Kreativität und kindlicher Bindung. Ein interdisziplinärer Ansatz zur Untersuchung der Entwicklung mathematischer Kreativität bei sogenannten Risikokindern. In B. Brandt, R. Vogel, & G. Krummheuer (Eds.), *Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education“ (IDeA)* (pp. 175–196). Münster: Waxmann.
- Jourdain, R. (2001). *Das wohltemperierte Gehirn: Wie Musik im Kopf entsteht und wirkt*. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akad. Verl.
- Kelstrom, J. M. (1998). The Untapped Power of Music: Its Role in the Curriculum and Its Effect on Academic Achievement. *NASSP Bulletin*, 82(597), 34–43. doi:10.1177/019263659808259707
- Krummheuer, G. (2007). Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. In K. Rabenstein (Ed.), *Kooperatives und selbstständiges Arbeiten von Schülern. Zur Qualitätsentwicklung von Unterricht* (1st ed., pp. 61–86). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Lang, A. (1993). Zeichen nach innen, Zeichen nach außen - eine semiotisch-ökonomische Psychologie als Kulturwissenschaft. In P. Rusterholz & M. Svilar (Eds.), *Welt der Zeichen - Welt der Wirklichkeit. Referate der Münchener Tagung und der Vorlesungsreihe des Collegium generale der Universität Bern im Sommersemester 1992* (Vol. 38, pp. 55–85). Bern: Haupt.



- Lehmann, I. (2009). Fibonacci-Zahlen - Ausdruck von Schönheit und Harmonie in der Kunst [Fibonacci numbers - expression of beauty and harmony in art]. *Der Mathematikunterricht*, 55(2), 51–63.
- Liebetrau, P. (2004). *Planung von gutem Unterricht. Ringvorlesung "Unterricht, der Schülerinnen und Schüler herausfordert"*. Retrieved from <http://www.uni-kassel.de/refsp/Ringvorlesung/vorlesung%20Liebetrau.pdf>
- Lorenz, J.-H. (2003). Rhythmus und Mathematik. *Sache, Wort, Zahl*, 31(56), 16–20.
- Merker, B. (2000). Synchronous Chorus and the Origins of Music. *Musicae Scientiae*, 3(1 suppl), 59–73. doi:10.1177/10298649000030S105
- Neubert, S. (2008). John Dewey (1859-1952). In B. Dollinger (Ed.), *Klassiker der Pädagogik. Die Bildung der modernen Gesellschaft* (2nd ed., pp. 221–246). Wiesbaden: VS, Verl. für Sozialwiss.
- Nimczik, O. (2002). There must be countless ways of counting. "Counting Keys" und "Counting Duets" von Tom Johnson. *Musik & Bildung*, (1), 48–51.
- Poincaré, H. (1948). *Science and method*. New York: Dover. New York: Dover.
- Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, K. N. (1995). Listening to Mozart enhances spatial-temporal reasoning: towards a neurophysiological basis. *Neuroscience Letters*, 185(1), 44–47. doi:10.1016/0304-3940(94)11221-4
- Reimer, B. (1989). Music Education and Aesthetic Education: Past and Present. *Music Educators Journal*, 75(6), 22–28. doi:10.2307/3398124
- Reinmann-Rothmeier, G., & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Eds.), *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch* (pp. 601–646). Weinheim.
- Saunders, J., Hilton, C., & Welch, G. F. (Eds.). (2015). *European Music Portfolio (EMP) – Maths: Sounding Ways Into Mathematics. State of the Art Papers*. Retrieved from [http://maths.emportfolio.eu/images/deliverables/State\\_of\\_the\\_Arts\\_EMP\\_M.pdf](http://maths.emportfolio.eu/images/deliverables/State_of_the_Arts_EMP_M.pdf)
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on teaching and learning* (pp. 334–370). Old Tappan, NJ: Macmillan.
- Simpkins, S. D., Vest, A. E., & Becnel, J. N. (2010). Participating in sport and music activities in adolescence: the role of activity participation and motivational beliefs during elementary school. *Journal of youth and adolescence*, 39, 1368-86.
- Small, C. (1998). *Musicking: The meanings of performing and listening. Music/culture*. Hanover: University Press of New England.
- Smolej Fritz, B., & Peklaj, C. (2011). Processes of self-regulated learning in music theory in elementary music schools in Slovenia. *International Journal of Music Education*, 29, 15-27. doi:10.1177/0255761410389658
- Spychiger, M. (1997). Aesthetic and praxial philosophies of music education compared: A semiotic consideration. *Philosophy of music education review*, 5(1), 33–41.
- Spychiger, M. (2015a). Lernpsychologische Perspektiven für eine grundschulspezifische Musikdidaktik. In M. Fuchs (Ed.), *Musikdidaktik Grundschule. Theoretische Grundlagen und Praxisvorschläge* (1st ed., pp. 50–71). Esslingen: Helbling.
- Spychiger, M. (2015b). Theorie-Praxis Bezug im Mentoring. Beispiele und pädagogische Interaktionen in Praxisgesprächen. In C. Villiger (Ed.), *Zwischen Theorie und Praxis. Ansprüche und Möglichkeiten in der Lehrer(innen)bildung* (pp. 109–130). Münster [u.a.]: Waxmann.
- Spychiger, M. B. (1995). Rationales for Music Education: A View from the Psychology of Emotion. *Journal of Aesthetic Education*, 29(4), 53. doi:10.2307/3333291
- Spychiger, M. B. (2001). Understanding Musical Activity and Musical Learning as Sign Processes: Toward a Semiotic Approach to Music Education. *Journal of Aesthetic Education*, 35(1), 53. doi:10.2307/3333771

- Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Stoll, R. W. (2001a). musik: wörter, töne zahlen. *Neue Zeitschrift für Musik*, (1), 42–47.
- Stoll, R. W. (Ed.). (2001b). *Neue Zeitschrift für Musik. CLXII/1 (January–February 2001): Magie der Zahl* [The magic of numbers] (Vol. 162). Mainz: Schott Musik International.
- Vogel, R. (2005). Patterns - a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(5), 445–449. Retrieved from <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm055a17.pdf>
- Vogel, R. (2008). Mathematik im Kindergartenalltag entdecken und erfinden – Konkretisierung eines Konzepts zur mathematischen Denkentwicklung am Beispiel von Bewegung und Raum. In B. Daiber & W. Weiland (Eds.), *Impulse der Elementardidaktik. Eine gemeinsame Ausbildung für Kindergarten und Grundschule* (pp. 89–100). Hohengehren: Schneider Verlag.
- Vogel, R. (2014). Mathematical Situations of Play and Exploration as an Empirical Research Instrument. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Eds.), *Early Mathematics Learning* (pp. 223–236). Springer New York. Retrieved from [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-4678-1\\_14](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-4678-1_14)
- Vogel, R., & Wippermann, S. (2011). Dokumentation didaktischen Wissens in der Hochschule: Didaktische Design Patterns als eine Form des Best-Practice-Sharing im Bereich von IKT in der Hochschullehre. In K. Fuchs-Kittowski, W. Umstätter, & R. Wagner-Döbler (Eds.), *Wissensmanagement in der Wissenschaft* (2nd ed., Vol. 2004, pp. 27–41). Berlin: Gesellschaft für Wissenschaftsforschung e.V. c/o Inst. f. Bibliotheks- und Informationswissenschaft der Humboldt-Universität zu Berlin. Retrieved from [http://www.wissenschaftsforschung.de/JB04\\_27-41.pdf](http://www.wissenschaftsforschung.de/JB04_27-41.pdf)
- Waters, A. J., Underwood, G., & Findlay, J. M. (1997). Studying expertise in music reading: Use of a pattern-matching paradigm. *Perception & Psychophysics*, 59(4), 477–488. doi:10.3758/BF03211857
- Weber, E. W. (1991). *Schafft die Hauptfächer ab!: Plädoyer für eine Schule ohne Stress*. Gümligen [etc.]: Zytglogge.
- Wilson, B. G. (1996). *Constructivist learning environments: Case studies in instructional design*. Englewood Cliffs, N.J.: Educational Technology Publications.